

Entre la Terminale et les CPGE scientifiques

Mathématiques

Lycée Louis le Grand

Introduction

Les journées « Portes Ouvertes » du lycée Louis-le-Grand permettent aux élèves de Terminale candidats aux CPGE et à leurs parents de dialoguer avec les professeurs des classes préparatoires. Deux questions reviennent fréquemment.

- Comment un élève de Terminale peut-il se préparer efficacement aux CPGE ?
- Quelles sont les mathématiques accessibles à un bachelier très intéressé par la discipline et désirant un peu dépasser le programme de Terminale ?

Ce document, destiné aux élèves de Terminale entrant en PCSI ou MPSI au lycée Louis le Grand, a été élaboré pour répondre à ces deux demandes. Sa lecture n'a bien évidemment **aucun caractère obligatoire**.

Organisation et contenu de ce texte

Pour répondre aux deux demandes ci-dessus, le texte est divisé en deux grandes parties, chacune très substantielle.

La première partie est un outil destiné à aider **ceux des élèves qui le désirent** à revoir les mathématiques étudiées au lycée dans l'optique des classes de PCSI et MPSI.

La seconde partie, constituée d'approfondissements, est destinée aux élèves particulièrement intéressés par les mathématiques et **ayant déjà une pratique importante des outils présentés dans la première partie**. Il s'agit en fait d'un premier pas très significatif dans le programme de CPGE. Cette partie est complétée par un problème et par un petit texte indiquant dans quel esprit ce document a été conçu.

Le texte introduit plusieurs notions et résultats qui ne font pas partie des programmes de Terminale. Ces compléments apparaissent de manière très limitée dans la première partie, beaucoup plus nettement dans la seconde. **Il va de soi qu'ils seront intégralement repris en première année de CPGE.**

Chaque partie est organisée en chapitres, eux-mêmes divisés en paragraphes. Un paragraphe commence par des rappels et/ou des exemples et est suivi d'une liste fournie d'exercices. Ces exercices reçoivent pour la plupart un corrigé succinct. Les résultats des exemples et exercices signalés par le symbole (*) sont classiques en CPGE ; certains sont d'ailleurs des résultats de cours.

Le texte est complété, de manière non systématique, par des commentaires historiques permettant de mettre en perspective les résultats présentés ; la lecture de ces commentaires n'est nullement indispensable à la compréhension de la partie proprement mathématique. D'autre part, dans un but d'efficacité pédagogique, les thèmes et exercices présentés ici ont été choisis de manière à former un ensemble aussi cohérent que possible. Vous retrouverez certains objets et certaines méthodes à plusieurs reprises, les renvois étant souvent explicités.

Les exercices sont variés. Certains sont des applications directes, parfois répétitives, du programme de Terminale ou des compléments de cours proposés dans le texte. Indispensables pour acquérir des bases solides et des réflexes efficaces, ils sont à travailler en priorité. D'autres, plus ambitieux, font établir des résultats intéressants et/ou souvent utiles. Les considérations esthétiques ou culturelles ont eu leur part dans la sélection effectuée. En revanche, les exercices « à astuce », dont la vertu formatrice est très faible, ont été exclus.

Les symboles (F), (AD), (D), (TD) désignent respectivement des exercices « faciles », « assez difficiles », « difficiles », « très difficiles ». Ces mentions sont d'une part subjectives, d'autre part relatives : le niveau d'ensemble des exercices proposés est très élevé par rapport au programme de Terminale.

Comment utiliser ce document

Il est recommandé d'étudier la première partie du texte en suivant l'ordre proposé. La seconde peut être abordée de manière plus libre.

Pour chaque paragraphe, le travail se découple en deux phases. La première est l'étude des rappels, compléments et exemples. Pour chaque exemple, il est conseillé de refaire complètement (et sans recopier le texte) raisonnements et calculs. Cette étape d'appropriation du contenu est essentielle. La seconde phase est la résolution d'une partie des exercices. La liste proposée est très copieuse. Cette abondance permet des entraînements de niveaux variés.

Ne pas trouver, même en y passant du temps, un exercice (F) ou (AD) ne préjuge en rien de votre future réussite en CPGE. Sécher fait partie de l'activité mathématique. D'une part, aboutir après un long travail procure une grande satisfaction. D'autre part, même en cas d'échec, le temps passé à chercher permet de progresser et de comprendre réellement une solution ; inversement, lire le corrigé d'un exercice sans s'être réellement engagé dans la recherche ne procure le plus souvent aucun bénéfice.

Nous espérons que l'étude de ce document vous procurera plaisir et profit.

Sommaire

I. OUTILS ET TECHNIQUES DE BASE	5
1 Rédaction, modes de raisonnement	6
1.1 Rédaction, quantificateurs	6
1.1.1 Vocabulaire et notations utilisés	6
1.1.2 Généralités	8
1.1.3 Quantificateurs	8
1.2 Le raisonnement par récurrence (1)	9
1.3 Le raisonnement par récurrence (2)	12
1.4 Le raisonnement par l'absurde	15
1.5 Le raisonnement par analyse-synthèse	17
2 Calculs algébriques	19
2.1 Généralités et rappels	19
2.2 Le symbole $\sum$	19
2.3 Sommes télescopiques	22
2.4 Le symbole $\prod$	25
2.5 Factorielle d'un entier naturel	27
3 Trigonométrie et nombres complexes	31
3.1 Trigonométrie	31
3.2 Nombres complexes	35
4 Inégalités, trinôme du second degré réel	38
4.1 Inégalités et inéquations : méthodes élémentaires	38
4.2 Le trinôme du second degré réel	39
5 Dérivation	42
5.1 Calcul des dérivées	42
5.2 Tangente à un graphe	44
5.3 Applications de la dérivation	44
5.3.1 Étude de fonctions, résolution d'équations	45
5.3.2 Démonstration d'inégalités	49
6 Calcul des limites	52
6.1 Introduction et premiers exemples	52
6.2 Utilisation de taux d'accroissement	53
6.3 Mise en facteur du terme prépondérant	53
7 Intégration	56
7.1 Rappels	56
7.2 L'intégration par parties	59
8 Réponses ou indications	62
II. APPROFONDISSEMENTS	81

1	Nombres complexes, deuxième épisode	82
1.1	Technique de l'arc moitié	82
1.2	Calcul de sommes trigonométriques	83
1.3	Racines de l'unité	84
1.4	La formule du binôme	87
1.5	Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-a}{b-a}$.	92
1.6	L'inégalité triangulaire	93
2	Polynômes	96
2.1	Polynômes	96
2.2	Racines d'un polynôme	99
2.3	Rigidité	102
2.4	L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$	104
2.5	Somme et produit des racines d'un polynôme	108
3	Dérivation, deuxième épisode	111
3.1	Caractérisation des fonctions constantes	111
3.2	L'équation différentielle $y' = \lambda y$	112
3.3	La condition nécessaire d'extremum	113
4	Les fonctions puissances	115
5	Calcul des limites, deuxième épisode	122
5.1	Croissances comparées usuelles	122
5.2	Utilisation de la forme exponentielle	124
6	Intégration, deuxième épisode	125
6.1	Quelques applications de l'intégration par parties	125
6.2	La méthode des rectangles	131
7	Problème : deux calculs de $\zeta(2)$	136
8	Appendice	140
9	Réponses ou indications	142

Première partie

Outils et techniques de base

Cette partie permet de réviser les mathématiques étudiées au lycée dans la perspective d'une classe préparatoire MPSI ou PCSI. Ses buts principaux sont les suivants.

- Rappeler quelques modes de raisonnement en les illustrant par des exemples significatifs.
- Préciser, surtout à travers des exemples, la façon dont un texte mathématique doit être rédigé.
- Conforter la maîtrise du calcul.

Le programme de Terminale est complété par un nombre très limité de points importants : quantificateurs, symboles $\sum$ et $\prod$, dérivée d'une composée, intégration par parties.

Il est conseillé de lire cette partie en respectant l'ordre.

Afin de faciliter le travail du lecteur, un certain nombre de définitions et notations d'usage courant en CPGE mais pas forcément en Terminale sont rappelées en **1.1.1**.

1 Rédaction, modes de raisonnement

1.1 Rédaction, quantificateurs

1.1.1 Vocabulaire et notations utilisés

Pour la commodité du lecteur, on regroupe ici quelques termes et notations d'usage courant.

Ensembles de nombres usuels

Dans tout ce texte, on utilise les notations usuelles ci-après.

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire ≥ 1 .

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions

$$\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*.$$

On peut, quitte à simplifier, supposer la fraction irréductible, c'est-à-dire que le seul diviseur commun à p et q est 1.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}^{++}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Les nombres réels non rationnels sont dits irrationnels. Vous rencontrerez dans ce texte plusieurs exemples de nombres irrationnels.

Segments de $\mathbb{R}$

Si a et b sont deux nombres réels, on note $[a, b]$ l'ensemble des réels compris, au sens large, entre a et b .

Cette notation vaut quel que soit l'ordre dans lequel a et b sont rangés. Ainsi :

$$[0, 1] = [1, 0].$$

Les ensembles de la forme $[a, b]$ sont appelés *segments de $\mathbb{R}$* . Noter que les segments de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles fermés et bornés.

Partie entière d'un nombre réel

La *partie entière*, ou *partie entière inférieure* d'un réel x , notée $\lfloor x \rfloor$, désigne le plus grand entier relatif plus petit que x . Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ appartient à $\mathbb{Z}$ et vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ainsi :

$$\lfloor 3,8 \rfloor = 3, \quad \lfloor -4,1 \rfloor = -5.$$

Si x est positif ou nul, $\lfloor x \rfloor$ s'obtient en « enlevant à x sa partie décimale ».

Limites

Pour a et b dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la notation classique

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

est génératrice d'incorrections : elle conduit à supposer a priori l'existence d'une limite. On lui préfère ici l'écriture

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

Pour une suite $(u_n)_{n \geq 0}$, « n ne peut tendre que vers $+\infty$ ». On écrit indifféremment

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell, \quad \text{ou} : u_n \longrightarrow \ell.$$

Dérivées successives d'une fonction

Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I , la fonction dérivée de f est notée f' . Si f' est elle-même dérivable sur I , on dit que f est *deux fois dérivable* sur I ; la dérivée $(f')'$ de f' est alors notée f'' . On généralise sans peine ; si f est n fois dérivable sur I , sa dérivée n -ième est notée $f^{(n)}$.

Cercle unité, ou cercle trigonométrique

On appelle ainsi le cercle de centre O et de rayon 1 du plan $\mathbb{R}^2$. Lorsque ce plan est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le cercle s'identifie à l'ensemble des complexes de module 1.

Pente d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Soit D une droite du plan $\mathbb{R}^2$ non parallèle à l'axe des ordonnées : D admet donc une unique équation de la forme

$$y = ax + b, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On appelle *pente* ou *coefficient directeur* de D le réel a . L'interprétation géométrique est claire : si M_1 et M_2 sont deux points distincts de D de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

i.e.

Cette abréviation du latin « id est » est très employée en mathématiques ; elle signifie « c'est-à-dire ».

1.1.2 Généralités

La rédaction mathématique obéit à des règles précises qui doivent être rapidement maîtrisées. Voici les plus importantes.

- Un objet mathématique est *déclaré* avant d'être utilisé, en général par le terme « soit » ; la déclaration précise la nature de l'objet (exemples : « soit $\vec{v}$ un vecteur non nul », « soit z un nombre complexe non réel », « soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ » ...).

- Un discours mathématique n'est pas une suite de symboles. L'argumentation est, pour l'essentiel, rédigée en langage ordinaire (et correct), avec des phrases complètes.

En particulier, les quantificateurs et les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$, utiles pour énoncer de manière précise et concise des propriétés, ne doivent pas être employés comme des abréviations à l'intérieur du discours.

- Il est bon d'annoncer ce que l'on va faire, par des locutions du type « Montrons que ».

Bien rédiger s'acquiert essentiellement par l'usage ; les exemples présentés dans la suite devraient vous donner une idée de ce qui est attendu.

1.1.3 Quantificateurs

Les quantificateurs sont évoqués dans le programme de Terminale sans que les notations les concernant ne soient exigibles. Précisons ces notations, dont l'emploi est très commode et que nous utiliserons dans la suite.

Le quantificateur universel est noté $\forall$; il signifie « pour tout » ou « quel que soit ». Le quantificateur existentiel est noté $\exists$; il signifie « il existe ». Par exemple, la phrase

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

signifie que, pour tout réel x , le réel e^x est strictement positif. La phrase :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = x^5 - 5x$$

signifie que, pour tout réel y , il existe (au moins) un réel x tel que

$$x^5 - 5x = y,$$

ce que l'on peut établir au moyen d'une étude de fonction (cf paragraphe **I.5.3.1**).

Les quantificateurs permettent de formuler de manière condensée certaines propriétés. Vous verrez par exemple que, pour une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$, l'assertion « $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 » est définie par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon.$$

Cette définition est intuitivement raisonnable : dès qu'on se fixe un seuil ε , il existe un entier naturel N (dépendant de ε) tel que, pour $n \geq N$, $|u_n|$ soit majoré par ε . De manière plus informelle, étant donné un seuil $\varepsilon > 0$, la suite (u_n) est bornée par ε « à partir d'un certain rang ».

On n'emploie les symboles $\forall$ et $\exists$ que dans des phrases intégralement écrites en langage quantifié et, à vrai dire, le plus souvent dans des définitions. En aucun cas on ne peut mélanger quantificateur et phrase française : les quantificateurs ne sont pas des abréviations. Commencer une démonstration par un quantificateur est une faute grave. Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie pour tout réel x , la rédaction commence en *déclarant* x : « Soit x dans $\mathbb{R}$. » . On montre ensuite que la propriété désirée est vraie pour x .

Dans la suite de ce document, nous utiliserons les quantificateurs uniquement pour formuler rapidement certaines propriétés.

1.2 Le raisonnement par récurrence (1)

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de l'entier naturel n . Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, on peut procéder de la façon suivante.

- *Initialisation*. On établit la propriété pour $n = 0$.
- *Hérédité*. On fixe un entier n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On montre alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

Ces deux points étant acquis, on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n . Le raisonnement présenté est la forme la plus simple de raisonnement par récurrence.

Il se peut que l'on demande de prouver la validité d'une propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$; l'initialisation consiste alors en la vérification de $\mathcal{P}_1$.

Le raisonnement par récurrence est un outil essentiel. Dans la plupart des exemples que vous verrez en première année, sa mise en oeuvre ne pose pas de difficulté. Il convient en revanche de rédiger soigneusement. En particulier, n étant fixé, aucune quantification relative à l'entier n ne doit apparaître dans la formulation de la propriété $\mathcal{P}_n$: nommer $\mathcal{P}_n$ une propriété de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \dots$$

n'a aucun sens. Il suffit de substituer à n une valeur quelconque (disons 2014) pour s'en convaincre.

Exemples

1. (*) *Somme des carrés des n premiers entiers*

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe **I.2.3**.

Ici, nous allons montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation. La vérification de $\mathcal{P}_1$ est immédiate

$$1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors :

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2,$$

d'où, grâce à $\mathcal{P}_n$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)).$$

Mais :

$$n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3).$$

En fin de compte :

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

2. Une inégalité

Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Initialisation. On a $2 - \frac{1}{1} = 1$ donc :

$$1 \leq 2 - \frac{1}{1}.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

En ajoutant $1/(n+1)^2$ aux deux membres de l'inégalité, il vient :

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Notons maintenant que :

$$2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geq 0.$$

Il en résulte que le membre de droite de (1) est majoré par

$$2 - \frac{1}{n+1}.$$

Il en est a fortiori de même du membre de gauche, ce qui signifie que l'on a :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Exercice 1 ((F,*). Sommes des cubes des n premiers entiers). *Montrer :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 2 (AD). *Montrer :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n |\sin x|.$$

Exercice 3 (AD). *La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :*

$$u_0 \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2.$$

Calculer u_n en fonction de u_0 et n .

On pourra commencer par écrire u_n pour n valant 1, 2, 3, 4. De manière générale, lorsqu'on souhaite calculer une quantité dépendant d'un entier n , il est souvent utile de commencer par deviner le résultat en considérant les petites valeurs de n .

Exercice 4 ((AD,*). Suites arithmético-géométriques). *Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0 .

a) *Traiter le cas $a = 1$.*

On suppose désormais $a \neq 1$.

b) *Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution. Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur; seule est utile l'équation*

$$\ell = a\ell + b.$$

c) *On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:*

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Conclure.

d) *La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle convergente ?*

Les suites étudiées dans cet exercice sont dites « arithmético-géométriques ». Les suites arithmétiques (resp. géométriques) correspondent au cas particulier $a = 1$ (resp. $b = 0$).

Exercice 5 (D). Soit c dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, soit :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}.$$

Calculer $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ et généraliser.

1.3 Le raisonnement par récurrence (2)

On rencontre fréquemment des récurrences un petit peu plus compliquées. Ainsi, l'hérédité peut consister en la preuve du fait que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$, voire en la preuve du fait que $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$ impliquent $\mathcal{P}_{n+1}$ (« récurrence forte »). La rédaction doit évidemment être adaptée. Dans la première situation (« récurrence à deux termes »), par exemple, l'initialisation doit comporter la vérification de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Exemples

1. (*) Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ est définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite, introduite par Fibonacci au treizième siècle, possède de nombreuses propriétés. Nous allons montrer que F_n est donné par une formule relativement simple.

Posons

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Nous n'utiliserons pas ces expressions, mais le fait que α et β sont racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

La définition de $(F_n)_{n \geq 0}$ suggère d'établir $\mathcal{P}_n$ par une récurrence à deux termes.

Initialisation. Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées. En effet :

$$\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = 0 = F_0, \quad \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} = 1 = F_1.$$

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} + \alpha^n - \beta^{n+1} - \beta^n).$$

Mais :

$$\alpha^{n+1} + \alpha^n = \alpha^n \times (\alpha + 1) = \alpha^n \times \alpha^2 = \alpha^{n+2}.$$

De même :

$$\beta^{n+1} + \beta^n = \beta^{n+2}.$$

Finalement :

$$F_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est démontrée.

Remarques

(a) *Démonstration et explication*

Le raisonnement par récurrence est un outil très efficace pour établir des formules données. Comme l'illustre cet exemple, une démonstration n'est pas forcément une explication et il est légitime de se demander « d'où vient » la formule précédente. Vous verrez en première année une méthode générale permettant de calculer le terme général d'une suite vérifiant une relation de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

(b) *À quoi peut servir l'expression obtenue ?*

D'abord, à rendre plus ou moins immédiate la démonstration de formules algébriques relatives à la suite $(F_n)_{n \geq 0}$, sans pour autant en donner systématiquement la meilleure approche.

Ensuite, à donner le comportement asymptotique (c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$) de $(F_n)_{n \geq 0}$: $(F_n)_{n \geq 0}$ est différence de deux suites géométriques de raisons respectives $\alpha > 1$ et $\beta \in]-1, 0[$. Lorsque n tend vers $+\infty$, F_n se comporte « à peu près » comme la suite géométrique $(\alpha^n / \sqrt{5})_{n \geq 0}$, ce que la notion de suites équivalentes, étudiée en première année de CPGE, permettra de préciser. Nous prouverons dans le paragraphe **I.6.3** un résultat de même nature :

$$(1) \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.$$

Il est clair que l'apparition de α dans (1) ne peut suivre immédiatement de la définition de $(F_n)_{n \geq 0}$, clair également que la formule prouvée ici peut conduire à une preuve de (1).

En revanche, « à cause du $\sqrt{5}$ », l'expression de F_n n'est pas directement adaptée à la démonstration de résultats « arithmétiques » relatifs à la suite $(F_n)_{n \geq 0}$.

2. (*) *Existence de la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers*

Montrons que tout entier $n \geq 2$ est produit de nombres premiers. L'assertion $\mathcal{P}_n$ est donc « n est produit de nombres premiers ».

Initialisation. Puisque $2 = 2$, $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité. Soit maintenant $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout k de $\{2, \dots, n\}$ et montrons que $n+1$ est produit de nombres premiers. Deux cas se présentent.

- L'entier $n+1$ est premier, donc produit de nombres premiers.

- L'entier $n+1$ n'est pas premier et peut donc s'écrire $n+1 = ab$ où a et b sont des entiers de $\{2, \dots, n\}$. On applique $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$: a et b sont produits de nombres premiers, il en est donc de même de leur produit $n+1$.

L'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.

Remarque *Unicité de la décomposition en facteurs premiers*

Il est nettement moins facile d'établir qu'à l'ordre des facteurs près, il n'y a qu'une décomposition d'un entier ≥ 2 en produit de facteurs premiers. Ce résultat fondamental sera établi en MPSI.

Exercice 6 (F). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

Exercice 7 (F). La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}.$$

Calculer u_2, u_3, u_4 . Deviner ensuite une formule pour u_n . Démontrer finalement la formule devinée par récurrence.

L'exercice suivant, plus abstrait, sera utilisé dans la partie **II** (exercice 186).

Exercice 8 (AD). Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :

$$i) \forall n \in A, \quad 2n \in A \quad \text{et} \quad ii) \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n+1 \in A \Rightarrow n \in A.$$

a) Montrer :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad 2^m \in A.$$

b) Montrer : $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 (D). La suite $(F_n)_{n \geq 0}$ est celle de l'exemple 1. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$\Delta_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2.$$

a) Calculer Δ_n pour quelques valeurs de n . Deviner une formule donnant Δ_n et démontrer cette formule par récurrence.

b) Calculer directement Δ_n à partir de la formule obtenue dans l'exemple 1. Pour faciliter les calculs, mieux vaut ne pas remplacer tout de suite α et β par leurs expressions.

c) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont pas de diviseur commun dans $\mathbb{N}^*$ autre que 1.

Exercice 10 (TD). La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n + 1.$$

b) Trouver $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq C(n + 1).$$

Exercice 11 ((D). Fractions égyptiennes). On se propose de montrer que tout rationnel de $]0, 1[$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts. Ce type d'écriture, utilisé par les Égyptiens dans l'Antiquité, n'a pas un très grand intérêt, mais la preuve du résultat est un bon exemple de raisonnement par récurrence.

a) Soit x un rationnel de $]0, 1[$. On écrit donc

$$x = \frac{m}{n}, \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad m < n.$$

On effectue la division euclidienne de n par m :

$$n = qm + r, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad r \in \{0, \dots, m - 1\}.$$

On suppose que x n'est pas l'inverse d'un entier, c'est-à-dire que m ne divise pas n ou encore que $r \neq 0$.

Montrer que $x - \frac{1}{q+1}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{m'}{n'}, \quad n' \in \mathbb{N}^*, \quad m' \in \{1, \dots, m - 1\}.$$

b) En utilisant une hypothèse de récurrence judicieuse, démontrer la propriété voulue.

c) Constater que la démonstration précédente fournit en fait un algorithme de décomposition. Appliquer cet algorithme à $x = 5/17$.

1.4 Le raisonnement par l'absurde

Pour établir une propriété $\mathcal{P}$, on peut raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer que $\mathcal{P}$ est fausse et arriver à une contradiction. Les deux exemples proposés remontent à l'Antiquité.

Exemples

1. (*) Irrationalité de $\sqrt{2}$

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. En raisonnant par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut donc écrire :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ et où la fraction p/q est irréductible. En élevant au carré, il vient :

$$2q^2 = p^2.$$

Par conséquent, p^2 est pair. Or, le carré d'un entier impair est impair, comme le montre la formule :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Il s'ensuit que p est pair et s'écrit donc $2p'$ où $p' \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$q^2 = 2p'^2,$$

égalité qui montre que q^2 est pair, donc que q est pair. Les deux entiers p et q admettent 2 comme diviseur commun, ce qui contredit l'hypothèse.

Les preuves d'irrationalité reposent en général sur un raisonnement par l'absurde, ce qui est compréhensible, l'irrationalité étant définie par une propriété « négative ». On trouvera d'autres exemples simples dans les exercices de ce paragraphe et des exemples un peu plus élaborés dans la partie II.

2. (*) *Existence d'une infinité de nombres premiers*

Montrons que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini. On suppose par l'absurde que $\mathcal{P}$ est fini et on écrit

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_r\}, \quad p_1 < \dots < p_r.$$

Posons

$$N = p_1 \times \dots \times p_r + 1$$

et considérons p un diviseur premier de N . Par hypothèse, p est l'un des p_i et divise donc $p_1 \times \dots \times p_r = N - 1$. Il s'ensuit que p divise $N - (N - 1) = 1$, contradiction.

Exercice 12 (AD). Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}.$$

Montrer : $a = c$, $b = d$.

Exercice 13 (AD). Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.

Exercice 14 (AD). Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 15 (AD). a) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

b) Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.

c) Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle, deux nombres irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question avec le produit.

Exercice 16 (D). Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 17 (D). a) Montrer qu'il existe un unique réel x tel que

$$x^5 + x - 1 = 0.$$

On pourra utiliser une étude de fonctions.

b) On suppose que x est rationnel. On écrit donc $x = p/q$ où p est dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$ et la fraction p/q irréductible. Montrer que q divise p^5 . En déduire que $q = 1$. Montrer ensuite que p divise 1. Obtenir une contradiction et conclure.

Exercice 18 ((TD) Test des racines rationnelles pour un polynôme à coefficients entiers). *Généraliser l'exercice précédent en énonçant et démontrant un résultat relatif aux racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.*

1.5 Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé pour déterminer les solutions d'un problème donné lorsqu'une rédaction « par équivalence » est impossible ou simplement délicate. Dans la première partie (analyse), on détermine les propriétés d'une éventuelle solution, de manière à limiter sévèrement les possibilités. La seconde partie (synthèse) consiste à déterminer, parmi les solutions fournies par l'analyse, lesquelles sont effectivement solution du problème initial.

Dans les cas d'existence et unicité, l'analyse fournit en général une solution unique; la synthèse est alors une simple vérification du fait que la solution déterminée par l'analyse convient effectivement.

Exemples

1. (*) *Décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer qu'existe un unique couple (p, i) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- p est paire, i est impaire ;
- $f = p + i$.

Analyse. Supposons donc que f s'écrive $p + i$ avec p paire et i impaire. Fixons x dans $\mathbb{R}$. En testant sur x et $-x$ l'égalité des fonctions f et $p + i$, il vient :

$$f(x) = p(x) + i(x), \quad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

En faisant la somme et la différence de ces deux égalités, il vient :

$$p(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)), \quad i(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)).$$

Synthèse. Définissons deux fonctions p et i en posant, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$p(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)), \quad i(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)).$$

On vérifie immédiatement que p est paire, i impaire et que $f = p + i$.

2. (*) *Une équation fonctionnelle*

On appelle *équation fonctionnelle* la recherche des fonctions vérifiant certaines conditions. Voici un exemple très classique : on cherche les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Noter qu'il y a ici deux conditions : la dérivabilité et la relation (1).

Analyse. Soit f une éventuelle solution. Fixons y et dérivons par rapport à x . Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f'(x).$$

Prenons maintenant $x = 0$, ce qui est possible puisque l'égalité précédente est vraie pour tout x . Il vient, pour tout y de $\mathbb{R}$:

$$f'(y) = f'(0).$$

Ainsi, f' est constante et f affine, c'est-à-dire de la forme :

$$x \mapsto ax + b.$$

Synthèse. Soit f une fonction affine. On dispose de deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

Cherchons si f est solution du problème. D'abord, f est dérivable. Ensuite, pour x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b,$$

$$f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = a(x+y) + 2b.$$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut et il suffit que b soit nul. En conclusion, les solutions du problème sont les fonctions linéaires :

$$x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Remarque Amélioration du résultat

Une démonstration un peu plus compliquée établit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et continue sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax$. Comme la continuité est une propriété plus faible que la dérivabilité, ce résultat, que vous prouverez l'an prochain, est plus fort que celui démontré ici. La caractérisation des fonctions linéaires ainsi obtenue remonte à Cauchy (environ 1820).

Exercice 19 ((D, *) Caractérisation du logarithme). *Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 20 (D). *On se propose de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)).$$

Dans a) et b), f est une fonction solution.

a) Calculer $f(0)$. Montrer que f est paire.

b) Montrer que f'' est constante.

c) Conclure.

2 Calculs algébriques

Ce chapitre est fondamental. Son but est de consolider les techniques de calcul algébriques étudiées au lycée et d'introduire les symboles $\sum$ et $\prod$ ainsi que la notion de factorielle d'un entier naturel.

2.1 Généralités et rappels

Une bonne maîtrise du calcul algébrique est indispensable en mathématiques comme en physique. Au delà des règles de calcul élémentaires (distributivité, calcul sur les puissances...), il faut connaître par coeur les résultats suivants.

- Les identités remarquables usuelles : $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)$.
- La somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique $(a^k)_{k \geq 0}$ pour $a \neq 1$:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

à partir de laquelle on retrouve facilement la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique quelconque.

- La factorisation :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

qui est une conséquence simple de la formule précédente. Noter que si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ et on a également la factorisation :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

Exercice 21 (F). *Montrer que, pour tout entier naturel n , $7^{2n+1} + 6^{2n+1}$ est divisible par 13.*

Exercice 22 (F). *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $]1, +\infty[$. Montrer :*

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq n a^{n-1}.$$

Exercice 23 (D). *Soient a et n deux entiers ≥ 2 . On suppose que l'entier naturel $a^n - 1$ est premier.*

- Montrer que $a = 2$.*
- Montrer que n est premier.*

2.2 Le symbole $\sum$

La somme des nombres (réels ou complexes) $a_1, \dots, a_n$ est notée :

$$(1) \quad a_1 + \dots + a_n$$

ou, d'une manière plus compacte et dénuée de toute ambiguïté :

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_k.$$

On définit plus généralement, pour m entier de $\{1, \dots, n\}$:

$$(3) \quad \sum_{k=m}^n a_k = a_m + \dots + a_n.$$

Dans les expressions (2) et (3), la lettre k , appelée *indice*, est une *variable muette*, ce qui signifie que l'on peut changer son nom sans changer la somme : la somme (1) peut être notée :

$$\sum_{i=1}^n a_i.$$

C'est la même situation qu'en intégration. En effet, dans l'écriture

$$\int_a^b f(t) dt$$

la variable t est muette. La sommation est d'ailleurs la version « discrète » de l'intégration.

Les notations ont une importance centrale en mathématiques ; il suffit pour s'en convaincre d'essayer de faire une multiplication en chiffres romains. Le symbole $\sum$ et la notation indexée ont représenté un très grand progrès pour noter efficacement des sommes de longueur arbitraire et il est nécessaire de s'y habituer rapidement. Cependant, il ne faut pas hésiter à revenir à une écriture du type (1) en cas de besoin : pour un calcul non immédiat, il est souvent préférable de calculer, au moins au brouillon, avec des points de suspension.

Exemples

1. (*) *Un exemple trivial*

La somme

$$\sum_{k=0}^n 3$$

vaut $3(n+1)$: on somme $n+1$ termes, tous égaux à 3.

2. (*) *Linéarité de la somme*

Si $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux suites finies de nombres complexes, si λ et μ sont deux nombres complexes, alors :

$$\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k.$$

En effet, le membre de gauche vaut

$$(\lambda a_1 + \mu b_1) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(a_1 + \dots + a_n) + \mu(b_1 + \dots + b_n).$$

Cette propriété simple, d'usage constant, est appelée *linéarité de la somme* ; la terminologie s'éclaircira en CPGE.

3. (*) Progressions arithmétiques

La formule :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

se réécrit

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De cette formule on déduit la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. En effet, une suite arithmétique est de la forme $(ak + b)_{k \geq 0}$ (a est la *raison* de la progression, b son premier terme). Par linéarité de la somme, il vient :

$$(b + (a + b) + \cdots + ((n-1)a + b) = nb + a(1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

ce que l'on réécrit plus synthétiquement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (ak + b) = nb + a \sum_{k=0}^{n-1} k = nb + \frac{n(n-1)}{2}a.$$

Il est évidemment absurde d'apprendre par coeur cette formule. Mais il faut savoir la retrouver très rapidement.

4. (*) Progressions géométriques

La formule donnant la somme d'une progression géométrique se réécrit :

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

pour a nombre complexe différent de 1 et n dans $\mathbb{N}$.

5. (*) Nombres harmoniques

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit le n -ième *nombre harmonique* H_n par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Les nombres H_n interviennent très fréquemment en mathématiques et vous les rencontrerez à plusieurs reprises dans les deux années de CPGE. On ne dispose pas de formule simple « non sommatoire » pour H_n . Mais nous verrons dans le paragraphe **II.6.2** comment estimer H_n en comparant la somme à une intégrale.

Le matériel précédent permet déjà des calculs non triviaux. Quelques exemples, sous forme d'exercices.

Exercice 24 (F). Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)$$

des n premiers entiers impairs.

Exercice 25 ((F,*). Somme d'une série géométrique). Soit r un élément de $] -1, 1[$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :

$$S_n = \sum_{k=0}^n r^k.$$

Montrer :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-r}.$$

Exercice 26 (AD). On lance un dé équilibré. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne au moins un 6 parmi ces n lancers ? Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 (AD). On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 28 (AD). Montrer, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n.$$

Exercice 29 (D). En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n kx^k.$$

On distinguera le cas $x = 1$. Pour $|x| < 1$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 30 (D). On lance un dé équilibré. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Soit X la variable aléatoire donnant le premier instant d'apparition d'un 6, en convenant que $X = 0$ si 6 n'apparaît pas. Déterminer l'espérance de X . Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

2.3 Sommes télescopiques

En général, une somme ne peut pas s'exprimer de façon simple. Les cas où une simplification est possible n'en sont que plus précieux. Une situation intéressante est celle des *sommes télescopiques*. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_{n+1} - b_n.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^n a_k = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_{n+1} - b_n).$$

Les termes $b_1, b_2, \dots, b_n$ se simplifient. Il reste :

$$\sum_{k=0}^n a_k = b_{n+1} - b_0.$$

Il est évidemment possible d'établir cette formule par récurrence sur n .

Exemples

1. (*) *Somme d'une progression arithmétique par télescopage*

On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1.$$

En sommant ces égalités pour k entre 0 et n , on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2.$$

Cette égalité équivaut à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2k = n^2 - n = n(n-1),$$

c'est-à-dire, après division par 2, à la formule connue

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. (*) *Une somme télescopique classique*

On a :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Par télescopage, on en déduit, pour n entier ≥ 1 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

En particulier

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

La *décomposition des fractions rationnelles en éléments simples* étudiée en CPGE est une généralisation puissante de l'identité (1).

Nous allons profiter de l'occasion pour retrouver la majoration vérifiée par récurrence dans l'exemple 2 du paragraphe **I.1.2**. Soit n un entier ≥ 2 . On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}.$$

Or, pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Par suite :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)},$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On retrouve la majoration :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 31 (AD). a) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Si n est un entier ≥ 2 , simplifier :

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 32 (AD). Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Quelle est la limite de $(U_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 33 ((AD,*). Somme des premiers carrés par télescopage). a) Trouver trois réels a, b, c tels que, si :

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx,$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2.$$

En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

b) Adapter cette méthode pour calculer :

$$\sum_{k=1}^n k^3.$$

Remarque Somme des puissances p -ièmes des n premiers entiers naturels, polynômes de Bernoulli

On a rencontré dans les pages précédentes les trois formules :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour p et n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^n k^p$$

la somme des puissances p -ièmes des n premiers entiers. Vers 1650, Jacob Bernoulli a généralisé les formules précédentes et prouvé que, pour tout p , il existe un polynôme B_p (nommé depuis *polynôme de Bernoulli d'indice p*) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{p,n} = B_p(n).$$

Le terme de plus haut degré de B_p est $\frac{X^{p+1}}{p+1}$, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus pour $p=1, p=2, p=3$.

Les polynômes de Bernoulli interviennent dans beaucoup d'autres questions mathématiques ; vous les rencontrerez probablement en CPGE.

Exercice 34 (D). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = n.$$

Calculer u_n en fonction de n .

2.4 Le symbole $\prod$

Le produit des nombres (réels ou complexes) $a_1, \dots, a_n$ est noté soit :

$$(1) \quad a_1 \times \dots \times a_n = a_1 \dots a_n$$

soit, de manière plus compacte :

$$(2) \quad \prod_{k=1}^n a_k.$$

Ici encore, la lettre k est appelée *indice* et est une variable muette. Les commentaires relatifs à la somme s'adaptent immédiatement.

Exemples

1. (*) *Deux exemples faciles*

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 3$, on a :

$$\prod_{k=3}^n (-5) = (-5)^{n-2}.$$

On effectue en effet le produit de $n - 2$ facteurs tous égaux à -5 .

b) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^n 2^k = 2^{1+2+\dots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

2. (*) *Produits télescopiques*

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de complexes non nuls telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

On a alors

$$\prod_{k=0}^n a_k = \frac{b_1}{b_0} \times \frac{b_2}{b_1} \times \dots \times \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Les termes $b_1, b_2, \dots, b_n$ se simplifient. Il reste :

$$\prod_{k=0}^n a_k = \frac{b_{n+1}}{b_0}.$$

En guise d'application, calculons, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k+2}.$$

On a :

$$P_n = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}.$$

Par suite :

$$P_n = \frac{2}{n+2}.$$

Exercice 35 (F). a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :

$$A_n = \prod_{k=1}^n 4^{k^2+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :

$$B_n = \prod_{k=0}^n \frac{k+4}{k+3}.$$

Exercice 36 (AD). Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de

$$C_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

et trouver la limite de $(C_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 37 ((D). Une formule de Viète). Soit x un nombre réel non multiple entier de π . En remarquant que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sin(2y) = 2 \sin(y) \cos(y),$$

simplifier, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

En utilisant, après l'avoir justifiée (cf si besoin est le paragraphe **I.6.3**), la relation

$$\frac{\sin u}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1,$$

et en l'appliquant à $u = \frac{x}{2^n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, déterminer la limite de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Cet exercice est prolongé dans les exercices 45 et 46.

2.5 Factorielle d'un entier naturel

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $n!$ et on lit *factorielle de n* ou *factorielle n* le produit :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k.$$

Ainsi :

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040.$$

Il est commode de poser également $0! = 1$. Notons la relation de récurrence :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Les factorielles interviennent dans de nombreuses questions mathématiques (analyse, algèbre, combinatoire, probabilités). Voici quelques exemples.

Exemples

- (*) *Produit des premiers entiers pairs (resp. impairs)*

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère le produit P_n des nombres pairs compris entre 2 et $2n$:

$$P_n = \prod_{k=1}^n (2k).$$

On peut écrire :

$$P_n = (2 \times 2 \times \cdots \times 2) \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$$

où le nombre de 2 dans la première parenthèse est n . Ainsi :

$$P_n = 2^n n!.$$

Il est alors facile, pour n dans $\mathbb{N}^*$, de calculer le produit Q_n des nombres impairs compris entre 1 et $2n+1$. On observe d'abord que $P_n \times Q_n$ est le produit de tous les entiers entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$. En tenant compte du résultat précédent, il vient :

$$Q_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

2. (*) Un calcul de dérivée n -ième

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

On se propose de calculer les dérivées successives de f . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4}.$$

Il est alors raisonnable de conjecturer, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

La preuve par récurrence est facile. Soit, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

On a vérifié $\mathcal{P}_1$. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. En dérivant, il vient, pour x dans $\mathbb{R}^*$:

$$f^{(n+1)}(x) = -(n+1) \frac{(-1)^n n!}{x^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}.$$

L'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.

3. (*) Factorielles et coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{m}$ ont été définis par les arbres. Cette définition a permis, en classe de première, d'établir la *relation de Pascal* : pour n dans $\mathbb{N}^*$ et m dans $\{1, \dots, n-1\}$:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Les factorielles permettent de donner une formule close pour les coefficients binomiaux :

$$(1) \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}.$$

Cette expression est très utile, des points de vue théorique et numérique :
le calcul de

$$\binom{100}{5} = \frac{100.99.98.97.96}{5!} = \frac{100.99.98.97.96}{120} = 75287520$$

par la formule de Pascal promet d'être passablement fastidieux...

Vous verrez en première année une preuve de cette formule par le dénombrement. Une autre façon de procéder est d'observer que les quantités $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ vérifient la relation de Pascal. En effet, si $m \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m) + (n-1)!m}{m!(n-m)!},$$

quantité égale à

$$\frac{(n-1)!n}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Il est alors facile de se convaincre de la validité de (1).

Explicitons, pour n fixé, les valeurs de $\binom{n}{m}$ pour les premières valeurs de m :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Notons également la formule « de symétrie » :

$$\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}.$$

Exercice 38 (F). Donner une forme simple de

$$\sum_{k=1}^n (k \times k!).$$

On pourra utiliser l'égalité :

$$k \times k! = (k+1)! - k!.$$

Exercice 39 ((AD,*). Une somme de coefficients binomiaux). En utilisant la relation de Pascal :

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1},$$

valable pour k et n dans $\mathbb{N}$ avec $r+1 \leq k$, exprimer

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r}$$

comme un coefficient binomial.

Exercice 40 ((AD,*). Monotonie des coefficients binomiaux). Pour $0 \leq m \leq n-1$, simplifier le quotient :

$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}}$$

et comparer (pour $\leq$) ce quotient à 1.

En déduire :

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \dots \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Compte tenu de la propriété de symétrie :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

la suite d'inégalités ci-dessus donne, si n est fixé, le sens de variation de la suite $(\binom{n}{m})_{0 \leq m \leq n}$. Cette suite est croissante jusqu'à $\lfloor n/2 \rfloor$, puis décroissante.

Remarque Sur la croissance de la suite des factorielles

La relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \times (n!)$$

indique que la suite $(n!)_{n \geq 0}$ tend très vite vers $+\infty$. Précisément, comme le quotient :

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

tend vers $+\infty$, il n'est pas difficile de montrer que $(n!)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ plus vite que toute suite géométrique (en effet, pour une suite géométrique, le rapport de deux termes consécutifs est constant). Notons la majoration triviale :

$$n! \leq n^n,$$

qui vient du fait que chacun des n facteurs du produit $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ est positif et majoré par n . Vous trouverez un encadrement non trivial de $n!$ dans le paragraphe **II.6.2**. Enfin, vous démontrerez l'an prochain la remarquable formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

où le symbole $\sim$ signifie que le quotient des deux termes tend vers 1. Cette relation joue un rôle important dans de nombreuses questions, notamment en probabilités.

3 Trigonométrie et nombres complexes

3.1 Trigonométrie

Rappels

La trigonométrie est un outil très efficace en géométrie euclidienne du plan (et également de l'espace). Elle joue un rôle important en mathématiques et en physique. Il est essentiel de connaître les points suivants.

- Les valeurs des cosinus et sinus des angles « usuels ». En cas d'hésitation, tracer systématiquement le cercle trigonométrique.

- Les formules :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \quad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x).$$

Ces formules peuvent être retrouvées rapidement à partir de la formule

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(développer et prendre parties réelles et imaginaires des deux membres), mais il est à peu près indispensable de les connaître par coeur. Signalons au passage que, pour x réel, nous utiliserons parfois la notation :

$$\exp(ix) = e^{ix}.$$

Il faut également avoir en tête le cas particulier des formules de duplication :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

Exercice 41 (F). *Vérifier l'égalité :*

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\pi/12$.

Exercice 42 (F). *Calculer le cosinus de $\pi/8$ en utilisant la formule de duplication pour le cosinus.*

Exercice 43 (AD). *Déterminer sans calcul le maximum sur $\mathbb{R}$ de :*

$$x \mapsto \sin(x) \cos(x).$$

Exercice 44 (F). *Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.*

Exercice 45 ((AD) Une formule de Viète, suite). *Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :*

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ radicaux}).$$

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \prod_{k=1}^n u_k.$$

En utilisant l'exercice 37, montrer :

$$\frac{v_n}{2^n} \longrightarrow \frac{2}{\pi}.$$

Cette formule a été découverte par Viète (1593). On trouvera une autre expression de π comme « produit infini », due à Wallis, dans le paragraphe **II.6.1**.

Exercice 46 ((AD) Variante de la formule de Viète). a) Soit y dans $\mathbb{R}$ non multiple entier de π . Exprimer :

$$\frac{\sin(3y)}{\sin(y)}$$

en fonction de $\cos(2y)$.

b) Soit x un réel. On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1 + 2 \cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}.$$

Déduire de a) une expression simplifiée de u_n . Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Les « autres » formules de trigonométrie, par exemple du type :

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

ou

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \right)$$

se déduisent immédiatement des formules d'addition et doivent être retrouvées rapidement.

Congruences modulo un nombre réel

Soit a un réel non nul. Si x et y sont deux réels, on dit que x et y sont congrus modulo a et on écrit :

$$x \equiv y[a]$$

s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$x - y = ka.$$

Le langage des congruences simplifie la formulation de certaines propriétés trigonométriques. Par exemple, pour x et y dans $\mathbb{R}$, l'examen du cercle trigonométrique justifie les équivalences :

$$\cos(x) = \cos(y) \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi];$$

$$\sin(x) = \sin(y) \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi];$$

$$e^{ix} = e^{iy} \iff x \equiv y [2\pi].$$

On peut additionner deux congruences de même module :

$$x \equiv y [a], \quad x' \equiv y' [a] \Rightarrow x + x' \equiv y + y' [a].$$

On peut multiplier une congruence (ou la diviser) par un réel non nul, mais il ne faut pas oublier de faire subir la même opération au module de congruence :

$$x \equiv y [a] \Rightarrow \lambda x \equiv \lambda y [\lambda a].$$

Enfin, une congruence modulo un réel non nul a implique la congruence modulo les réels $a/n, n \in \mathbb{N}^*$:

$$x \equiv y [a], n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \equiv y [a/n].$$

Par exemple, deux réels congrus modulo 4π le sont modulo $2\pi, \pi, 4\pi/3 \dots$

Le langage des congruences est très commode et son intérêt n'est pas limité à la trigonométrie ; il sera utilisé en arithmétique en classe de MPSI.

Exercice 47 (F). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$a) \cos x = \frac{1}{2}, \quad b) \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 48 (F). Déterminer les réels x de $[0, 2\pi]$ tels que :

$$\cos(x) \geq \sin(x).$$

Exercice 49 ((F,*). Transformation de $a \sin x + b \cos x$). Soient a et b deux réels non tous deux nuls.

a) Montrer que le point

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

appartient au cercle de centre O et de rayon 1 du plan. Il existe donc φ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

b) Vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Quel est le maximum de $a \cos(x) + b \sin(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$?

c) Appliquer ce qui précède pour résoudre :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 50 (TD). *Montrer :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos((\sin(x))) > \sin(\cos(x)).$$

La fonction tangente

Pour x réel non congru à $\pi/2$ modulo π , $\cos(x) \neq 0$ et on peut définir :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

La fonction $\tan$ ainsi définie est très souvent utile. Ses propriétés se déduisent immédiatement de celles de $\sin$ et $\cos$.

- La fonction $\tan$ est π -périodique et impaire.
- Valeurs « classiques » (à retrouver) :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

- Pour x réel non congru à $\pi/2$ modulo π , $\tan(x)$ est la pente de la droite reliant l'origine de $\mathbb{R}^2$ au point de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$ du cercle trigonométrique.

- La fonction $\tan$ est dérivable sur chacun des intervalles

$$I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

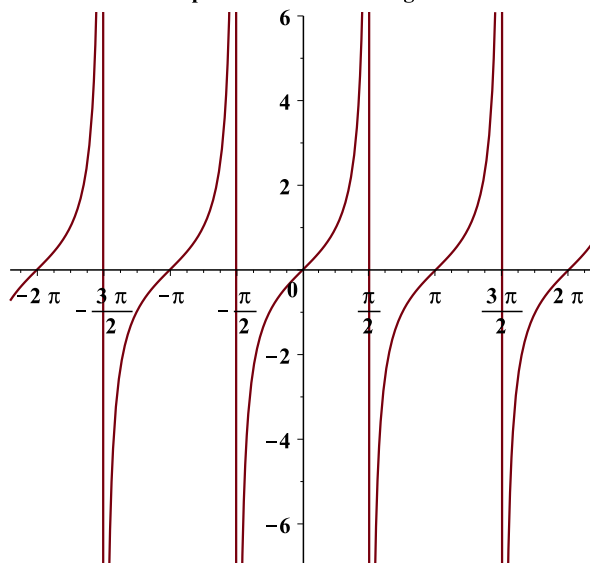
Pour x dans un tel intervalle I_k :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) - (-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

La seconde forme de la dérivée est à retenir. Ce calcul de dérivée montre que $\tan$ est strictement croissante sur chaque intervalle I_k . On a de plus :

$$\tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^-} +\infty, \quad \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\pi/2^+} -\infty.$$

Graphes de la fonction tangente



Exercice 51 (F). *Sous des hypothèses convenables, exprimer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$.*

Exercice 52 ((F,*)) Expression de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$. Soient x dans $\mathbb{R}$ non congru à π modulo 2π , $t = \tan(x/2)$. Vérifier

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ces formules montrent en particulier que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont des fractions rationnelles (c'est-à-dire des quotients de polynômes) en $\tan(x/2)$. Cette remarque s'applique notamment au calcul d'intégrales.

3.2 Nombres complexes

Le programme de Terminale permet de maîtriser les points suivants.

- Forme algébrique $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'un nombre complexe.
- Conjugué et module d'un nombre complexe, relation $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Forme trigonométrique $re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta \in \mathbb{R}$ d'un nombre complexe non nul.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement.
- Représentation géométrique des nombres complexes ; affixe d'un point, d'un vecteur.
- Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.

On se borne ici à des exercices relatifs à ces points. L'étude du trinôme du second degré du point de vue réel est rappelée dans le paragraphe **I.4.2**.

L'étude des nombres complexes sera approfondie en classe de MPSI. On trouvera un avant-goût de ces compléments dans le chapitre **II.1** et, du point de vue des polynômes, dans le chapitre **II.2**.

Exercice 53 (F). *Écrire*

$$\frac{3-2i}{2+5i} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+i}{i}\right)^3$$

sous la forme $a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 54 (F). *Soit :*

$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

a) Écrire z sous forme algébrique : $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, puis sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^{+}$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

b) Calculer z^3 .

Exercice 55 (F). *Trouver les nombres complexes z tels que :*

$$z^2 + 10z + 169 = 0.$$

Exercice 56 (F). Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = i$, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

Exercice 57 (F). a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?

b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 58 (F). Mettre $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique et trouver les entiers naturels n tels que

$$(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 59 (F). Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$(1) \quad |z - i| = |z + i|$$

par deux méthodes :

a) par un calcul en écrivant $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

b) en interprétant géométriquement la relation (1).

Exercice 60 (F). Soit z un nombre complexe, M son image dans le plan, M' la symétrique de M par rapport à (Oy) . Quelle est l'affixe z' de M' ?

Exercice 61 (F). Que dire, si z est un nombre complexe, des points d'affixes z et $-\bar{i}z$?

Exercice 62 (F). Soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs images dans le plan, I leur milieu. Montrer que l'affixe de I est $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

Exercice 63 ((AD) Nombres complexes et théorème de la médiane). a) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

b) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, ses côtés, les longueurs de ses diagonales.

c) Soient A, B, C trois points non alignés du point, I le milieu de $[BC]$. Dédire de b) une expression de AI^2 en fonction de AB^2, BC^2, CA^2 .

Exercice 64 ((AD) Point de concours des médianes). On garde les notations précédentes. Montrer que les médianes du triangle ABC passent par le point G d'affixe

$$g = \frac{a + b + c}{3}.$$

Exercice 65 (AD). Trouver les nombres complexes non nuls z tels que

$$Z = z + \frac{1}{z}$$

soit réel. Idem en remplaçant « réel » par « imaginaire pur ».

Exercice 66 ((AD,*)) Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Soient

$$z = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right), \quad x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

a) Montrer :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

b) Vérifier l'égalité

$$x = z + \frac{1}{z}.$$

c) Exprimer x^2 en fonction de z . En utilisant a), trouver alors une équation du second degré vérifiée par x . En déduire une expression simple de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Remarque Polygones constructibles

Dans l'exercice précédent et dans les exercices 41, 42 et 45, on part d'un réel de la forme $\cos(\pi r)$ avec r rationnel, que l'on arrive à « calculer en utilisant uniquement les rationnels, les quatre opérations et des radicaux ». Ces formules sont intimement liées à des problèmes géométriques (*constructibilité à la règle et au compas des polygones réguliers*). Plus précisément, en étudiant la constructibilité à la règle et au compas des polygones réguliers, Gauss a déterminé tous les rationnels r possédant la propriété précédente. Il existe ainsi une expression du type susmentionné (mais fort compliquée) de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).$$

Exercice 67 (D). Soit

$$x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

En utilisant la méthode utilisée dans l'exercice précédent, trouver des entiers relatifs a, b, c tels que

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Exercice 68 (D). Soient a et b dans $\mathbb{C}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer :

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1.$$

4 Inégalités, trinôme du second degré réel

4.1 Inégalités et inéquations : méthodes élémentaires

La manipulation des inégalités n'est pas difficile, mais demande du soin. Il est en particulier essentiel :

- de bien maîtriser les règles des signes ;
- de réaliser que le signe d'une expression est d'autant plus facile à étudier qu'elle est factorisée.

Exercice 69 (F). *Quels sont les réels x tels que*

$$f(x) = (x^2 - 3)(1 - \sqrt{x})(|x| - 6)(|4x + 3|)$$

soit strictement positif ?

Exercice 70 ((F)). a) *Quel ensemble décrivent respectivement x^2 et x^3 lorsque x décrit l'intervalle $[-2, +\infty[$?*

b) *Quel ensemble décrit $1/x$ lorsque x décrit $] -4, 5] \setminus \{0\}$?*

c) *Quels ensembles décrivent respectivement $x + y$, xy , x/y lorsque $x > -2$ et $y \geq 2$?*

d) *Même question qu'en b) avec $x > -2$ et $0 < y \leq 3$.*

Exercice 71 ((F,*)) L'inégalité arithmético-géométrique pour deux réels positifs). *Montrer, pour a et b dans $\mathbb{R}$:*

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Soient x et y des réels ≥ 0 . En appliquant l'inégalité précédente à $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, on obtient

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2},$$

avec égalité si et seulement si $x = y$.

L'exercice précédent donne le cas le plus simple de l'*inégalité arithmético-géométrique*. Le résultat de cet exercice sera généralisé de deux manières différentes dans le chapitre **II.4** : inégalité de Young, forme générale de l'inégalité arithmético-géométrique.

Notons enfin que l'on peut reformuler le résultat précédent des deux manières suivantes :

- la somme de deux réels positifs x et y de produit p donné est minimale lorsque $x = y = \sqrt{p}$;
- le produit de deux réels positifs x et y de somme donnée S est maximal lorsque $x = y = S/2$.

Exercice 72 (F) Rectangles de périmètre donné d'aire maximale). *On se donne un rectangle de demi-périmètre p . Montrer que son aire est majorée par $p^2/4$. Pour quels rectangles y a-t-il égalité ?*

Exercice 73 (F). Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$. Prouver :

$$\left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right| \leq \sqrt{|a - b|}.$$

Dans l'exercice ci-après, on commencera par dire pour quelles valeurs de x les expressions étudiées sont définies.

Exercice 74 (AD). Selon la valeur de x , déterminer le signe de :

- a) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$,
- b) $g(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$,
- c) $h(x) = \ln(x+3) + \ln(x+2) - \ln(x+11)$.

Exercice 75 (AD). Soit p un élément de $]0,1[$. Une expérience réussit avec la probabilité p . On la répète n fois de manière indépendante. La probabilité qu'elle ait réussi au moins une fois est notée p_n . Quels sont les entiers n tels que

$$p_n \geq \frac{1}{2}?$$

4.2 Le trinôme du second degré réel

Soient a, b, c trois nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Si $a = 0$, f est une fonction affine. Si $a \neq 0$, on dit que f est un polynôme de degré 2 ou encore un *trinôme du second degré*.

Forme canonique

L'étude du signe et des racines du trinôme du second degré repose sous la *mise sous forme canonique*. Rappelons ce dont il s'agit. Soient en effet a, b, c dans $\mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Posons :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour x dans $\mathbb{C}$, on peut écrire :

$$(2) \quad ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

On a ainsi :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Racines du trinôme et factorisation

On est ainsi conduit à la discussion classique de l'équation

$$(3) \quad f(x) = 0 :$$

- si $\Delta = 0$, (3) admet une unique racine dans $\mathbb{C}$ (dite « double »), à savoir

$$-\frac{b}{2a};$$

cette racine est réelle.

- si $\Delta > 0$, (3) admet deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- si $\Delta < 0$, (3) admet deux racines complexes non réelles et *conjuguées*

Notons x_1 et x_2 les racines de (3) dans $\mathbb{C}$ si $\Delta \neq 0$. Pour $\Delta = 0$, notons $x_1 = x_2$ la racine double de (3). La mise sous forme canonique entraîne la factorisation :

$$(4) \quad \forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemple

Soit θ dans $\mathbb{R}$. Le trinôme

$$x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$$

a pour discriminant

$$\Delta = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2.$$

Les racines de ce trinôme sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; Δ est nul si et seulement si $\sin(\theta) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si θ est un multiple entier de π . Dans tous les cas, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}).$$

Exercice 76 (F). Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :

$$p_m : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + mx + 1.$$

Déterminer, selon la valeur de m , le nombre de racines réelles de p_m .

Exercice 77 (AD). Soit a dans $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de réels x tels que :

$$x^3 - x = a^3 - a.$$

Exercice 78 (D). Pour λ dans $\mathbb{R}$, soit E_λ l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0.$$

Décrire l'ensemble des racines des équations E_λ lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.

Exercice 79 ((D,*). Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes). Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$$

En remarquant que $f(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Somme et produit des racines

Revenons à l'équation (3) et notons-en x_1 et x_2 les racines, avec $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$. On a alors les formules :

$$(5) \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ainsi, la lecture des coefficients d'une équation de degré 2 donne immédiatement la somme et le produit des racines.

Exercice 80 (F). Soient x_1 et x_2 les deux racines (éventuellement confondues) du trinôme

$$p : x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

Calculer $x_1^2 + x_2^2$ et $(x_1 - x_2)^2$ en fonction de a, b, c .

Si on sait que l'équation (3) admet deux racines réelles (éventuellement confondues) x_1 et x_2 , on détermine immédiatement leur signe avec les formules (5). En effet, le signe du produit c/a permet de dire si x_1 et x_2 sont ou non de même signe. Dans le cas où x_1 et x_2 sont de même signe, c'est-à-dire si $c/a > 0$, le signe commun de x_1 et x_2 est celui de leur somme $-b/a$.

Notons enfin que si $c/a < 0$, alors

$$\delta = b^2 - 4ac = a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} \right) > 0.$$

La condition $c/a < 0$ est donc équivalente à l'existence de deux racines réelles non nulles de signes opposés.

Signe du trinôme pour les valeurs réelles de la variable

Supposons, pour fixer les idées :

$$a > 0.$$

La mise sous forme canonique (2) et la factorisation (4) entraînent la discussion suivante.

- Si $\Delta < 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0.$$

- Si $\Delta = 0$ et si x_1 est la racine double de (3), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}, \quad f(x) > 0.$$

- Si $\Delta > 0$ et si on note $x_1 < x_2$ les deux racines réelles de (3), alors :

$$\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[, \quad f(x) > 0.$$

$$\forall x \in]x_1, x_2[, \quad f(x) < 0.$$

La discussion est analogue si $a < 0$.

Exercice 81 (F). Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :

$$p_m : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + mx + 1.$$

Déterminer, selon la valeur de m et les valeurs du réel x , le signe de $f(x)$.

5 Dérivation

L'invention du calcul différentiel et intégral au dix-septième siècle est un tournant de l'histoire des mathématiques. Les outils ainsi créés ont permis d'étudier avec beaucoup d'efficacité des problèmes aussi divers que le calcul des aires et des longueurs, la détermination des tangentes à une courbe, les problèmes d'extremum. Ils ont également permis de développer la cinématique et la mécanique.

La mise en place du calcul différentiel et intégral des fonctions d'une variable réelle est le cœur du programme d'analyse de première année de CPGE. Le cours correspondant est traité en suivant l'approche mise au point par les mathématiciens du dix-neuvième siècle (notamment Cauchy et Weierstrass) : l'analyse y est reprise à son début (nombres réels, suites), les théorèmes sont complètement démontrés à partir de ce point de départ. Il est cependant très souhaitable de disposer préalablement d'une solide maîtrise pratique du sujet. C'est le but de ce chapitre et des deux suivants.

5.1 Calcul des dérivées

Il est essentiel de bien connaître les règles de calcul sur les dérivées : dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ainsi que les dérivées des fonctions usuelles (polynômes, racine carrée, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques), d'une composée de la forme $\exp(f)$, $\ln f$, $\sqrt{f}$ ou :

$$x \mapsto f(ax + b).$$

Dérivée d'une composée

La formule donnant la dérivée d'une composée, très utile, généralise les règles évoquées ci-dessus. Elle ne figure pas explicitement au programme de Terminale et vous sera démontrée en première année de CPGE. Vous pouvez l'admettre et l'utiliser dès maintenant.

Théorème 1 (Dérivée d'une composée). *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ notés respectivement I et J . Supposons que l'on puisse composer f et g , c'est-à-dire que, pour tout x de I , $f(x)$ appartienne à J , que f soit dérivable en x et g en $f(x)$. Soit $g \circ f$ la fonction définie sur I par*

$$\forall x \in I, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Exercice 82 (F). *Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.*

- $a : x \mapsto x^3 \cos(5x + 1)$,
- $b : x \mapsto e^{\cos x}$,
- $c : x \mapsto x \ln(x)$,
- $d : x \mapsto \ln(e^x + 1)$,

- $e : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$,
- $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$,
- $g : x \mapsto \ln(e^x + \sin(x))$; pour cet exemple, on ne cherchera pas à expliciter l'ensemble de définition,
- $h : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$,
- $i : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{x^2-2}$,
- $j : x \mapsto \ln(\cos(2x))$,
- $k : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$,
- $\ell : x \mapsto \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$,
- $m : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$,
- $n : x \mapsto \ln(\ln(x))$,
- $o : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$.

Exercice 83 (F). Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer la dérivée n -ième de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \cos x, \quad g : x \mapsto e^{ax+b}, \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 84 (F, *) Dérivée d'une fonction paire, impaire, périodique). Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f paire. Que dire de f' ? Même question si f est impaire, si f est périodique de période T ($T > 0$ fixé).

Exercice 85 (AD). a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer en utilisant a) la dérivée n -ième de

$$f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \mapsto \frac{1}{x(x+1)}.$$

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Trouver les nombres réels x tels que :

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

Exercice 86 ((AD, *) Dérivée logarithmique). Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, la dérivée logarithmique de u est la fonction u'/u . Le terme « dérivée logarithmique » vient du fait que u'/u est la dérivée de $\ln(|u|)$, mais cette interprétation ne simplifie pas les calculs (et ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes étudiées en CPGE).

a) Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonctions de celles de u et v .

b) Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.

c) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \dots < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur chacun des intervalles où cette fonction est définie.

On voit sur cet exemple que la dérivée logarithmique d'un produit est plus lisible que la dérivée (les produits parasites ont disparu).

5.2 Tangente à un graphe

La dérivée a plusieurs interprétations intéressantes. Du point de vue géométrique, le nombre $f'(a)$ représente la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a . Précisément, si f est dérivable, l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Cette formule est immédiate : la tangente a pour pente $f'(a)$ et passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$.

Exercice 87 ((F). Une propriété des paraboles). Soient a un réel non nul, f la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2,$$

x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2 .

Exercice 88 (AD). a) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un réel tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 recoupe l'axe (Ox) .

b) On suppose que a est un réel positif, que f est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - a.$$

Avec les notations précédentes, vérifier :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right).$$

Nous retrouverons cette relation un peu plus loin, lors du calcul de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton (exercice 90). La forme générale de la méthode de Newton repose sur le calcul de a).

5.3 Applications de la dérivation

On rappelle ici deux techniques très importantes liées à la dérivation. On trouvera d'autres applications dans le chapitre **II.3**.

5.3.1 Étude de fonctions, résolution d'équations

L'étude des fonctions est une technique simple mais très importante. Elle est fondée sur le lien entre monotonie de f sur un intervalle et signe de f' , lien admis en classe de Terminale mais qui sera démontré en première année de CPGE.

Une application immédiate est la détermination du nombre de solutions d'une équation et le positionnement des racines. La lecture du tableau de variations d'une fonction dérivable f permet en effet de déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme

$$f(x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple Une étude d'équation

Soit p un nombre réel. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$(E_p) \quad x^5 - 5x = p ?$$

On pose, pour x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x^5 - 5x.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

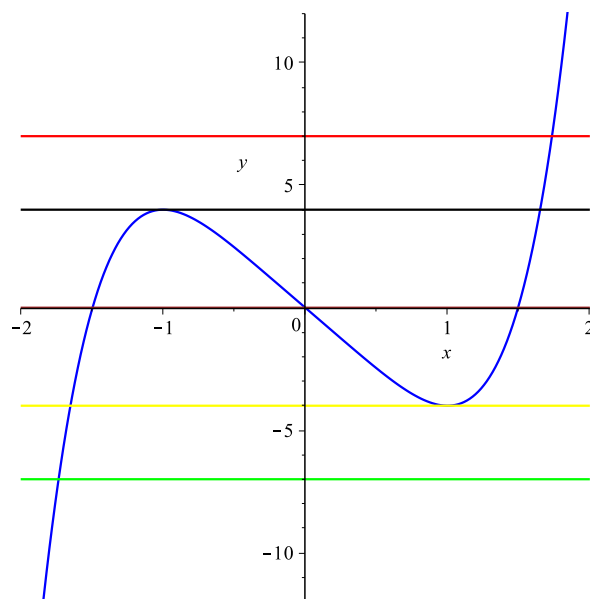
Cette inégalité rend apparent le signe de $f'(x)$. La fonction f est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En utilisant les relations

$$f(-1) = 4 = -f(1), \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

le tableau de variations donne les résultats ci-après :

- si $p < -4$, l'équation (E_p) admet une unique solution réelle, qui appartient à $] -\infty, -1]$;
- si $p \in] -4, 4[$, l'équation (E_p) admet trois solutions réelles : une dans $] -\infty, -1[$, une dans $] -1, 1[$, une dans $]1, +\infty[$;
- si $p > 4$, l'équation (E_p) admet une unique solution réelle, qui appartient à $[1, +\infty[$;
- si $p = -4$ ou $p = 4$, l'équation (E_p) possède deux solutions distinctes.

Le graphe de la fonction f et le graphe des droites d'équation $y = p$ pour $p = -7, -4, 0, 4, 7$ permettent de visualiser ce résultat.



Exercice 89 ((F,*). Fonctions hyperboliques). Les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- Étudier ces deux fonctions ; en tracer les graphes.
- Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer

$$ch^2(x) - sh^2(x).$$

Exercice 90 ((D,*). Calcul d'une racine carrée par la méthode de Newton). Soit a dans $\mathbb{R}^{+*}$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par son premier terme u_0 , élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_a(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

- Étudier f_a et en représenter le graphe.
- Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_a(x) \geq \sqrt{a},$$

$$\forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[, \quad f_a(x) \leq x.$$

En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

d) Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2.$$

e) Calculer v_n en fonction de n (cf exercice 3).

f) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Conclure que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

g) On prend $a = 2$, $u_0 = 1$. Représenter graphiquement la fonction f_2 et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Écrire l'inégalité de la question e) dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$? Faire les calculs correspondants.

Remarque Méthode de Newton

L'algorithme de calcul approchée d'une racine carrée étudié dans l'exercice précédent remonte à l'Antiquité (Héron). Il a été généralisé au dix-septième siècle par Newton et Raphson en une méthode donnant des approximations rapidement convergentes des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Décrivons-en brièvement le principe. On se propose de calculer numériquement une racine ℓ de l'équation dont on connaît une première approximation. On considère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

le point de départ x_0 étant choisi aussi près de ℓ que le permet l'estimation dont on dispose. La signification géométrique de cette relation de récurrence est décrite dans l'exercice 88. On montre que si x_0 est assez près de ℓ , alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ . La convergence est de plus très rapide. Dans l'exercice précédent, les questions f) et g) montrent que l'erreur $|u_n - \sqrt{a}|$ est majorée par une quantité de la forme

$$e_n = Ck^{2^n}$$

avec $C > 0$ et $k < 1$. Ce type d'estimation vaut en fait pour toute fonction. Comme

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{C},$$

on voit qu'à peu de choses près, le nombre de décimales correctes double à chaque étape (« convergence quadratique »). La preuve du résultat général est accessible en première année de CPGE.

La méthode de Newton a été considérablement généralisée au vingtième siècle. Elle garde une grande importance en analyse.

Exercice 91 ((D,*). Le nombre de racines réelles d'une équation de degré 3). Soient p et q deux réels et, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

On se propose de déterminer le nombre de réels x tels que $f(x) = 0$.

a) On suppose $p \geq 0$. Tracer le tableau de variations de f et conclure dans ce cas.

b) On suppose $p < 0$.

Tracer le tableau de variations de f .

Soient x_1 et x_2 les points d'annulation de f' . Calculer $f(x_1) \times f(x_2)$ en fonction de p et q .

c) Déterminer, en fonction de la quantité

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2,$$

le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Ce résultat est l'analogue, pour les équations de degré 3, de la détermination du nombre de racines réelles d'une équation de degré 2 en fonction du discriminant.

Exercice 92 ((D,*). Nombre de racines de $P' - \alpha P$ si P est un polynôme réel de degré n ayant n racines distinctes). Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \dots < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

a) Dresser le tableau de variations de P'/P . On utilisera l'exercice 86.

b) Pour α dans $\mathbb{R}$, indiquer le nombre de racines de l'équation :

$$P'(x) - \alpha P(x) = 0.$$

Remarque Sur la méthode employée dans ce paragraphe

La méthode d'étude des équations

$$f(x) = \lambda$$

utilisée dans ce paragraphe repose implicitement sur les deux points suivants, dont le premier sera considérablement détaillé en première année de CPGE.

- Le *théorème des valeurs intermédiaires*, dont l'énoncé est le suivant :

« Soient f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I , γ un élément de $[f(a), f(b)]$. Alors l'équation

$$f(x) = \gamma$$

admet une solution dans $[a, b]$. »

- Le fait ci-après :

« Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, γ un nombre réel. Alors l'équation

$$f(x) = \gamma$$

admet au plus une solution dans I . »

Ce second point est évident : si, par exemple, f est strictement croissante sur I et si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$, ce qui montre qu'il ne peut exister deux éléments distincts de I d'image γ .

Le théorème des valeurs intermédiaires est nettement plus profond. La combinaison des deux résultats entraîne l'énoncé ci-après.

« Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , a et b deux points de I , γ un élément de $[f(a), f(b)]$. Alors l'équation

$$f(x) = \gamma$$

admet une unique solution dans $[a, b]$. »

C'est la combinaison de cet énoncé, de la continuité d'une fonction dérivable et du lien entre stricte monotonie et signe de la dérivée qui est utilisé ci-dessus.

Exercice 93 (AD). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = 1.$$

Montrer que f est constante.

Sans hypothèse de monotonie, le théorème des valeurs intermédiaires, permet d'établir qu'une équation de la forme $u(x) = 0$ où u est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une solution : il suffit d'exhiber deux éléments a et b de I tels que $u(a) \leq 0, u(b) \geq 0$. L'exercice ci-après est une illustration de cette méthode.

Exercice 94 (D). *Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$. On écrira cette équation sous la forme $g(x) = 0$ pour une certaine fonction g .*

Exercice 95 (D). *Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation*

$$x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x) = 2$$

admet au moins une solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$.

5.3.2 Démonstration d'inégalités

Une inégalité peut se traduire par la positivité d'une certaine fonction f . L'étude de f permet souvent d'accéder au signe de f via l'étude de ses variations.

Exemple (*) *Une inégalité souvent utile*

Démontrons l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1,$$

que vous aurez souvent l'occasion d'utiliser. On pose, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

L'inégalité proposée s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0.$$

Il s'agit donc de déterminer le signe de f . La connaissance des variations de f permet de répondre à cette question. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1.$$

Puisque $\exp$ est strictement croissante, f' est < 0 sur $\mathbb{R}^{-*}$, nulle en 0, > 0 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par suite, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+}$. Elle est donc partout supérieure ou égale à $f(0) = 0$. C'est le résultat désiré. Interprétation de l'inégalité établie : le graphe de la fonction $\exp$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

La preuve précédente montre en outre que, pour $x \neq 0$:

$$e^x > x + 1.$$

Une remarque pour conclure. Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Posant $y = x + 1$, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(y) \leq y - 1$$

avec égalité si et seulement si $y = 1$. Interprétation géométrique : le graphe de la fonction $\ln$ est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 96 ((F,*). Une inégalité utile). *Montrer l'inégalité :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin x \leq x.$$

Faire un dessin illustrant cette inégalité.

Exercice 97 (F). *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Exercice 98 (F). *Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer le minimum de la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln(x).$$

L'exercice ci-après fait établir un résultat important du programme d'analyse de CPGE, l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 99 ((AD,*) Inégalité des accroissements finis). Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, m et M deux nombres réels, f une fonction dérivable sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

Montrer :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

On pourra considérer les fonctions

$$g : x \mapsto f(x) - Mx, \quad h : x \mapsto f(x) - mx.$$

Exercice 100 ((D). Fonctions à dérivée seconde positive). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I , f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, \quad f''(x) \geq 0.$$

On se propose de montrer que le graphe de f est au-dessus de sa tangente au point a . On pose, pour x dans I :

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Calculer $g''(x)$, $g'(a)$. Déterminer le signe de $g'(x)$. Donner le tableau de variations de g et conclure.

Les fonctions possédant la propriété précédente sont dites convexes.

6 Calcul des limites

6.1 Introduction et premiers exemples

L'analyse asymptotique a pour but de comparer les fonctions au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$. Elle joue un rôle essentiel dans beaucoup d'applications (par exemple l'analyse d'algorithmes en informatique). Au cours des deux années de CPGE, vous étudierez un certain nombre de méthodes pour aborder ce type de problème. On se limite ici à quelques techniques simples de calcul des limites :

- méthodes directes (opérations, encadrement),
- utilisation du taux de variation,
- croissances comparées usuelles,
- mise en facteur du terme prépondérant, utilisation de la forme exponentielle.

Les exercices ci-après utilisent uniquement des techniques étudiées en Terminale (opérations algébriques sur les limites, produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0, encadrement).

Exercice 101 (F). *Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}, \quad b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3}, \quad c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}, \quad d : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}, \\ e : x \mapsto \cos(x^2) e^{-x}, \quad f : x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}, \quad g : x \mapsto (2 + \sin(x))x. \end{aligned}$$

Exercice 102 (F). *Trouver la limite en $+\infty$ de :*

$$x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

Exercice 103 (AD). *Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit :*

$$f(x) = \sin(1/x).$$

a) *Tracer sommairement le graphe de f . Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?*

b) *La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?*

c) *Quelle est la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 ?*

Exercice 104 (AD). *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor.$$

Exercice 105 (D). *Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n : N_n vaut 1 si $1 \leq n \leq 9$, 2 si $10 \leq n \leq 99$... Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{N_n}{\ln(n)}.$$

6.2 Utilisation de taux d'accroissement

La définition de la dérivée donne la relation :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a).$$

A priori, lorsque x tend vers a ,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est une forme indéterminée (numérateur et dénominateur tendent vers 0) ; la relation précédente permet de lever l'indétermination. Exemples importants :

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \quad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Bien entendu, cette méthode est limitée et artificielle. En PCSI et MPSI, l'étude des *développements limités* fournira des outils généraux très efficaces pour régler ce type de problème.

Exercice 106 (F). *En utilisant des taux d'accroissement, trouver les limites suivantes :*

$$\begin{aligned} & - \frac{\cos x - 1}{x}, \frac{\sin(5x)}{x}, \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin(4x)} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0, \\ & - \frac{\ln x}{x - 1} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 1. \end{aligned}$$

6.3 Mise en facteur du terme prépondérant

Pour déterminer la limite d'une forme indéterminée, une méthode essentielle est la *mise en facteur du terme prépondérant*.

Exemples

1. (*) Quotient de deux polynômes

Soient P et Q deux polynômes. Pour x dans $\mathbb{R}$, on écrit :

$$P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^q b_j x^j.$$

On suppose a_p et b_q non nuls (afin que P et Q soient de degrés respectifs p et q). Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On factorise par les termes prépondérants x^p et x^q . Il vient :

$$F(x) = x^{p-q} \frac{a_p + \frac{a_{p-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^p}}{b_q + \frac{b_{q-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^q}}.$$

On obtient

$$F(x) = x^{p-q} U(x), \quad \text{avec : } U(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{a_p}{b_q}.$$

La limite cherchée est donc :

- 0 si $q > p$,
- $\frac{a_p}{b_q} = \frac{a_p}{b_p}$ si $p = q$,
- $+\infty$ si $p > q$ et $\frac{a_p}{b_q} > 0$, $-\infty$ si $p > q$ et $\frac{a_p}{b_q} < 0$.

En résumé, la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est celle du quotient

$$\frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

des termes prépondérants des polynômes.

2. Déterminons la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^2 + x^3 + 3 \ln(x) + e^{-x}}{x^4 + \cos x - 1}$$

en $+\infty$. Le terme prépondérant du dénominateur $d(x)$ est x^4 , celui du numérateur $n(x)$ est x^3 . On écrit donc :

$$d(x) = x^4 \left(1 + \frac{\cos x}{x^4} - \frac{1}{x^4} \right) = x^4 u(x)$$

où $u(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. De même :

$$n(x) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = x^3 v(x)$$

où $v(x)$ tend vers 1 en $+\infty$. Il vient

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Ainsi $f(x)$ est le produit de $1/x$ qui tend vers $+\infty$ par $u(x)/v(x)$ qui tend vers 1. Au total :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Noter que la démonstration fournit un renseignement plus précis :

$$x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Autrement dit, $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ « à peu près comme $1/x$ ». La notion de fonctions équivalentes permettra de donner un sens précis à cette formulation un peu vague.

3. Soient α et β deux réels tels que

$$|\beta| < |\alpha|,$$

A et B deux réels non nuls. Posons

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Pour n tel que $u_n \neq 0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \frac{A + B \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{A + B \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

Le réel $\gamma = \beta/\alpha$ est de valeur absolue strictement inférieure à 1. La suite $(\gamma^n)_{n \geq 0}$ tend donc vers 0. On en déduit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.$$

On notera que pour la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$, on a :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 107 (F). *Trouver la limite en $+\infty$ de*

$$f(x) = \frac{50x + x \ln x}{x \ln(x) + 3}, \quad g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + \cos x}{x^{20} + 2x^{2013}}, \quad h(x) = \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{x/2}},$$

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}, \quad j(x) = \exp(-3\sqrt{x} + x - \ln(x^2 + 1) + \cos(x)),$$

$$k(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

7 Intégration

7.1 Rappels

L'intégration a été introduite en classe de Terminale. Le calcul des intégrales est limité, à ce niveau, à celui des primitives. Il est essentiel de connaître les points suivants.

- Le lien entre dérivation et intégration, c'est-à-dire le fait que si f est une fonction continue sur I et a un point de I , alors la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est dérivable sur I de dérivée f .

- Les primitives usuelles. À la liste vue en Terminale (polynômes, exp, cos, sin) s'ajoutent les fonctions puissances non entières : pour α réel différent de -1 , les primitives de

$$x \mapsto x^\alpha$$

sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Le cas $\alpha = -1$ est vraiment spécifique : les primitives de

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les

$$x \mapsto \ln(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- La *linéarité de l'intégrale*, c'est-à-dire les relations d'usage constant :

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt ;$$

$$\int_a^b \lambda f(t) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt.$$

- La possibilité d'intégrer les inégalités, c'est-à-dire, si $a < b$, l'implication :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t) \quad \implies \quad \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt.$$

Cas particulier souvent utile : la forme intégrale de l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire la majoration

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt,$$

que l'on obtient en intégrant l'encadrement

$$\forall t \in [a, b], \quad -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|.$$

Exercice 108 (F). Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2 \sin(5x)$,
2. $x \in \mathbb{R} \mapsto 6 e^{-4x}$,
3. $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x e^{e^x}$,
4. $x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{(\ln(x))^\alpha}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 109 (F). En utilisant les relations obtenues dans l'exemple 2 du paragraphe 2.3 et dans l'exercice 32, calculer :

$$I = \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}, \quad J = \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}.$$

Exercice 110 (F). Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt) \cos(qt) dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin(pt) \sin(qt) dt.$$

Exercice 111 ((F,*) Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment). Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

a) Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a, b]$? Montrer que si f est une fonction affine, sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

b) Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ appartient à $[m, M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de f sur $[a, b]$.

Exercice 112 ((AD,*) Valeur moyenne d'une fonction périodique). Soit f une fonction continue et T -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la valeur moyenne de f sur $[x, x+T]$ est indépendante du réel x . On l'appelle valeur moyenne de f .

b) Déterminer la valeur moyenne de $\cos$, de $\cos^2$, de $|\cos|$.

Exercice 113 (AD). a) Soit pour x dans $]0, +\infty[$:

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Calculer la dérivée de G . On pourra poser :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

et exprimer G en fonction de F .

b) Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

Exercice 114 ((D)). Une suite qui converge vers $\ln(2)$). Soient n dans $\mathbb{N}$, x dans $] -1, +\infty[$.

a) Montrer :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

b) En déduire :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

c) Montrer :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}.$$

d) Conclure :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

e) Plus généralement, montrer que, si $0 \leq x \leq 1$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1+x).$$

Donner une estimation de la « vitesse de convergence », c'est-à-dire de l'erreur :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right|.$$

f) Étendre ce résultat au cas $-1 < x \leq 0$.

Remarque Calcul des logarithmes

Le résultat de la question e) a été utilisé aux débuts du calcul infinitésimal pour calculer des valeurs approchées des logarithmes. Vous constaterez, si vous traitez la question e), que la vitesse de convergence est d'autant plus grande que x est proche de 0. Ainsi, pour calculer $\ln(2)$, utiliser la formule vue en d) est malhabile : la convergence est très lente, « en $1/n$ », de sorte qu'il faut calculer environ 100 termes de la suite pour avoir deux chiffres significatifs. On contourne cette difficulté en écrivant $\ln(2)$ à l'aide de logarithmes de nombres proches de 1. Première idée :

$$\ln(2) = -\ln(1/2).$$

Mais il est encore plus judicieux d'observer, comme l'a fait Newton, que

$$2 = \frac{1,2^2}{0,9 \times 0,8},$$

d'où :

$$\ln(2) = 2\ln(1,2) - \ln(0,9) - \ln(0,8).$$

Puisque les réels 0,8, 0,9 et 1,2 sont proches de 1, les convergences correspondantes sont très rapides.

Exercice 115 ((D)). Une formule sommatoire pour π). a) Montrer :

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad \int_0^{\tan(x)} \frac{dt}{1+t^2} = x.$$

En particulier :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}$, établir :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

c) Conclure :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}.$$

Remarque Calcul de π

La formule précédente semble avoir été découverte indépendamment par Gregory et Leibniz (vers 1670). Les remarques faites à propos du calcul de $\ln(2)$ après l'exercice précédent s'appliquent ici : la convergence de la suite précédente est trop lente pour se prêter à un calcul efficace de π . Pour pallier cet inconvénient, on peut utiliser une stratégie analogue à celle expliquée ci-dessus pour $\ln(2)$ en utilisant la fonction Arctan (définie en première année de CPGE) et les « formule de Machin » (exercice fréquemment posé en première année).

Le dernier exercice de ce paragraphe est la version intégrale de l'exercice 79.

Exercice 116 ((D,*). L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales). Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

Pour x réel, on pose :

$$S(x) = \int_a^b (f(t) + x g(t))^2 dt.$$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré ≤ 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

7.2 L'intégration par parties

La technique dite d'intégration par parties est une conséquence simple du lien entre primitive et intégrale et de la formule donnant la dérivation d'un produit. Elle est donc accessible en classe de Terminale. Elle ne figure pas dans les attendus du programme officiel mais enrichit considérablement les possibilités de calcul. Avant de l'énoncer, introduisons une notation. Si w est une fonction définie sur I , on pose :

$$w(b) - w(a) = [w(t)]_a^b.$$

Théorème 2 (Intégration par parties). Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sur I , à dérivées continues, a et b deux points de I . Alors :

$$(2) \quad \int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

Preuve. On sait que :

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

On a donc :

$$(1) \quad \int_a^b (u(t) v'(t) + u'(t) v(t)) dt = u(b) v(b) - u(a) v(a).$$

La formule désirée se déduit aisément de ce calcul et de la linéarité de l'intégrale.

Quel est l'intérêt de la formule d'intégration par parties ? Le crochet $[u(t)v(t)]_a^b$ se calcule immédiatement. Dès que le calcul des primitives de $u'v$ est plus simple que celui des primitives de uv' , la formule (2) apporte un gain.

Exemples

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Calculons

$$\int_0^x t \cos(t) dt.$$

Le point important est que

$$u : t \mapsto t$$

se dérive en la fonction constante égale à 1 alors que $\cos$ se primitive en $\sin$. Posant $v = \sin$, le produit $u'v = \sin$ s'intègre donc immédiatement, contrairement à la fonction initiale uv' . En appliquant la formule précédente, il vient :

$$\int_0^x u(t) v'(t) dt = [t \sin t]_0^x - \int_0^x \sin t dt.$$

On a :

$$[t \sin t]_0^x = x \sin(x), \quad \int_0^x \sin t dt = [-\cos t]_0^x = -\cos x + 1.$$

Au total :

$$\int_0^x t \cos(t) dt = x \sin x + \cos x - 1.$$

2. (*) Primitives de $\ln$

Soit x dans $\mathbb{R}^{+*}$. Calculons :

$$\int_1^x \ln(t) dt.$$

On pose ici, pour t dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$u(t) = \ln(t), \quad v(t) = t.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{1}{t}, \quad v'(t) = 1.$$

Le produit $u'v$ est la fonction constante égale à 1. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x dt = x \ln(x) - x + 1.$$

Conséquence : la fonction

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x \ln(x) - x$$

est l'unique primitive de $\ln$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prenant la valeur -1 en $x = 1$; les primitives de $\ln$ sur ce même intervalle sont les

$$x \longmapsto x \ln(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 117 (F). Calculer :

$$\int_0^x t^2 \sin(t) dt.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x) \sin(x)$ ou $x \mapsto p(x) \cos(x)$ où p est un polynôme.

Exercice 118 (F). Calculer :

$$\int_0^x t e^t dt, \quad \int_0^x t^2 e^t dt.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x) e^x$ où p est un polynôme.

Exercice 119 (AD). Calculer, si a et b sont deux réels non nuls et x un réel :

$$f(x) = \int_0^x e^{at} \cos(bt) dt.$$

On intégrera successivement deux fois par parties.

Exercice 120 (D). Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Exercice 121 ((D,*). Le lemme de Riemann-Lebesgue). Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue. Pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, démontrer :

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

En déduire :

$$\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Le résultat subsiste pour une fonction continue. La preuve, plus délicate, est accessible en CPGE.

8 Réponses ou indications

1. L'hérédité vient de la relation :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

2. Utiliser la formule

$$\sin((n+1)x) = \sin(nx) \cos(x) + \sin(x) \cos(nx),$$

qui entraîne

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| |\cos(x)| + |\sin(x)| |\cos(nx)|,$$

pui, puisque $\cos$ est bornée par 1 :

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| + |\sin(x)|.$$

La conclusion est facile par récurrence.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0^{(2^n)}$.

4. c) Si n est dans $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n.$$

- d) Pour n dans $\mathbb{N}$:

$$u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell).$$

Si $u_0 = \ell$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante. Sinon, elle converge vers ℓ pour $|a| < 1$, est non bornée donc non convergente si $|a| > 1$. Pour $a = -1$, $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont constantes associées à des valeurs différentes, $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

5. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, soit $f^{[n]} = f \circ f \cdots \circ f$ (n itérations). Le calcul direct de $f^{[2]}$ et $f^{[3]}$ permet de conjecturer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{[n]}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + ncx^2}}$$

que l'on démontre ensuite par récurrence sur n .

7. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

9. a) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Delta_n = -(-1)^n$.

- b) Pour n dans $\mathbb{N}$:

$$5\Delta_n = (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) (\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2.$$

Soit encore

$$5\Delta_n = -(\alpha\beta)^n (\alpha - \beta)^2.$$

Comme $\alpha\beta = -1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, le résultat suit.

- c) Un diviseur commun à F_n et F_{n+1} divise Δ_n .

11. a) On prend $m' = m - r, n' = (q + 1)(qm + r)$.

b) Raisonner par récurrence sur le numérateur de la fraction (formuler proprement l'hypothèse de récurrence).

c) $5/17 = 1/4 + 3/68, 3/68 = 1/23 + 1/1564, 5/17 = 1/4 + 1/23 + 1/1564$.

12. L'hypothèse entraîne que $a - c = \sqrt{2}(d - b)$. Si $d \neq b$, on divise par $d - b$ et on obtient la contradiction : $\sqrt{2}$ rationnel.

14. L'égalité $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ entraîne $2^q = 3^p$. Contradiction car le premier membre est pair, le second impair (ou à cause de l'unicité de décomposition d'un entier naturel non nul en produit de facteurs premiers).

15. a) Soient x un rationnel, y un irrationnel. Si $z = x + y$ était rationnel, $y = z - x$ serait rationnel comme différence de deux nombres rationnels.

c) On a, par exemple : $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ et $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

16. Le carré d'un nombre rationnel est rationnel. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ était rationnel, il en serait de même de $2\sqrt{6} + 5$, donc de $\sqrt{6}$, ce qui n'est pas (justifier).

18. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$ des entiers relatifs avec $a_n \neq 0$. Pour x dans $\mathbb{R}$, soit :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Soit r un rationnel : $r = p/q$ avec p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, p/q irréductible. Alors q divise a_n , p divise a_0 .

Ce « test des racines rationnelles » permet de limiter la recherche des racines rationnelles du polynôme P à un ensemble fini.

19. Analyse. On dérive l'équation proposée par rapport à x à y fixé. Il vient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \quad y f'(xy) = f'(x).$$

Prenant $y = 1/x$, on a

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) + \frac{f(1)}{x}.$$

D'autre part, en prenant $x = y = 1$ dans l'équation, on obtient

$$(2) \quad f(1) = 0.$$

En posant $C = f'(1)$, on tire de (1) et (2) les relations :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = C \ln(x).$$

Synthèse. Les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto C \ln(x), \quad C \in \mathbb{R}$$

vérifient clairement les conditions demandées.

20. a) En prenant $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$. En prenant $x = y$, il vient alors $f(x) = f(-x)$.

b) En dérivant deux fois par rapport à x , on a :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x).$$

En dérivant deux fois par rapport à y , on a :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(y).$$

En comparant, il vient $f''(x) = f''(y)$, et ceci est vrai pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

c) D'après b), f est une fonction polynomiale de degré au plus 2. En tenant compte de a), f est de la forme :

$$x \mapsto ax^2.$$

Réciproquement, il est clair que les fonctions de cette forme conviennent.

21. De manière générale, si p est un entier impair, la factorisation de $a^p + b^p$ montre que, pour a et b entiers, $a + b$ divise $a^p + b^p$.

22. Le quotient est égal à $1 + a + \dots + a^{n-1}$, somme de n termes tous majorés par a^{n-1} (car, puisque $a > 1$, on a $a^k \leq a^{n-1}$ pour $k \leq n-1$).

23. a) Comme $a-1$ divise $a^n - 1$ et $a-1 < a^n - 1$, le caractère premier de $a^n - 1$ implique $a-1 = 1$, i.e. $a = 2$.

b) Si n n'est pas premier, on dispose d'un diviseur d de n autre que 1 et n . Posant $b = 2^{n/d}$, $2^n - 1 = b^d - 1$ est divisible par $b - 1$ qui n'est égal ni à 1 ni à $2^n - 1$.

24. La réponse est n^2 .

25. On a $S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ et, puisque $|r| < 1$, $r^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

26. Soit A_k l'événement : « on obtient pour la première fois un 6 au k -ième lancer ». On a :

$$P(A_k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1}.$$

La probabilité d'obtenir un 6 avant le n -ième lancer est donc

$$\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

Cette probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui est conforme à l'intuition.

27. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}.$$

Comme $1/(2n+2)$ et $1/(2n+1)$ sont tous deux majorés par $1/2n$, la quantité précédente est négative et $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

29. En dérivant la relation :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

il vient :

$$\sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Il reste à multiplier par x .

Pour $|x| < 1$, cette quantité tend vers

$$\frac{x}{(1-x)^2}.$$

30. Reprenons les notations de l'exercice 26. L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

On obtient une expression sans symbole $\sum$ en substituant $5/6$ à x dans l'exercice précédent. La limite en $+\infty$ est 6, ce qui est intuitif.

31. a) On utilise :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Le résultat est $\ln(n+1)$. La limite est $+\infty$.

b) On utilise :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right) = \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k) \\ &= \ln(k+1) - \ln(k) - (\ln(k) - \ln(k-1)). \end{aligned}$$

Le résultat est :

$$\ln(n+1) - \ln(2) - (\ln(n) - \ln(1)) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

La limite est $-\ln(2)$.

32. On vérifie que le triplet

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

convient (pour le voir, tout réduire au même dénominateur ; des méthodes plus efficaces seront vues en MPSI).

La somme proposée n'est autre que :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

La limite est $\frac{1}{4}$.

34. On exprimera u_{n+2} en fonction de u_n , ce qui permettra de calculer u_n en séparant les cas « n pair » et « n impair ».

35.a) On a : $A_n = 4^{\alpha_n}$ où :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) = \frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}.$$

b) On a : $B_n = \frac{n+4}{3}$.

36. On a :

$$C_n = \prod_{k=1}^n \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

La limite de $(C_n)_{n \geq 2}$ est $\frac{1}{2}$.

37. En écrivant :

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \cos\left(\frac{x}{2^k}\right),$$

et en faisant le produit de ces égalités pour k dans $\{1, \dots, n\}$, il vient :

$$P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Comme :

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

la limite de $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est $\frac{\sin(x)}{x}$.

38. Le résultat est $(n+1)! - 1$.

39. On a une somme télescopique :

$$\sum_{k=r+1}^n \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} - 1.$$

Donc :

$$\sum_{k=r}^n \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

On peut établir cette formule de façon combinatoire.

40. Le quotient proposé vaut

$$\frac{n-m}{m+1}.$$

Il est ≥ 1 si et seulement si : $m \leq \frac{n-1}{2}$.

41. On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

42. En utilisant :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0,$$

il vient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

43. Grâce à la formule de duplication, le maximum est $1/2$.

44. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(3x) = 4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x).$$

45. a) Raisonner par récurrence sur n et utiliser la formule de duplication.
On notera que l'on généralise le résultat de l'exercice 42.

46.a) Pour y réel non multiple entier de π :

$$\frac{\sin(3y)}{\sin(y)} = 2 \cos(2y) + 1.$$

b) Par le même principe que dans l'exercice 37 :

$$u_n(x) = \frac{\sin(x)}{3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}.$$

Puis :

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}.$$

47. a) Les solutions sont les réels de la forme :

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Les solutions sont les réels de la forme :

$$\frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

48. L'ensemble des solutions est

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

49. a) Le maximum est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

b) L'équation s'écrit :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions sont les réels de la forme :

$$\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} : \quad \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

50. Posons, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos(\sin(x)) - \sin(\cos(x)).$$

La fonction f est paire et 2π -périodique. Pour établir que $f(x)$ strictement positif pour tout réel x , il suffit donc de montrer que tel est le cas pour x dans $[0, \pi]$. On écrit

$$f(x) = \cos(\sin(x)) - \cos(\pi/2 - \cos(x)).$$

Si x est dans $[0, \pi]$, $\sin(x)$ est dans $[0, 1]$ donc dans $[0, \pi]$, $\pi/2 - \cos(x)$ dans $[\pi/2 - 1, \pi/2 + 1]$ donc dans $[0, \pi]$. Comme $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, il suffit en fin de compte d'établir :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(x) < \frac{\pi}{2} - \cos(x).$$

Ce point découle de la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \cos(x - \pi/4)$$

et de l'inégalité $\sqrt{2} < \pi/2$.

51. Pour x, y et $x + y$ non congrus à $\pi/2$ modulo π , on a :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}.$$

53. a) La réponse est $\frac{-4 - 19i}{29}$.

b) La réponse est $-2 - 2i$.

54. a) On a :

$$z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}} = -1 + i\sqrt{3} = 2 \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right).$$

b) La forme trigonométrique montre que $z^3 = 8$.

55. Les solutions sont

$$-5 + 12i, \quad -5 - 12i.$$

56. Les racines carrées de i dans $\mathbb{C}$ sont

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} : \quad -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = \exp\left(i\frac{5\pi}{4}\right).$$

57. a) Les nombres complexes dont le carré est réel sont les nombres réels et les complexes imaginaires purs.

b) Les complexes dont le carré est imaginaire pur sont ceux de l'une des formes :

$$x + ix, \quad x - ix, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plus géométriquement, ce sont les complexes dont l'image appartient à l'une des deux bissectrices du repère orthonormé canonique, ou encore ceux dont un argument est congru à $\pi/4$ modulo π ou à $-\pi/4$ modulo π .

58. On écrit :

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right).$$

Les n qui conviennent sont les multiples de 6.

59. Les complexes qui conviennent sont les réels. (Géométriquement, l'ensemble recherché est celui des complexes dont l'image est équidistante des points d'affixes i et $-i$, c'est-à-dire la médiatrice du segment joignant ces deux points ou encore l'axe réel).

60. On a $z' = -\bar{z}$.

61. Le point d'affixe $-i\bar{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à la seconde bissectrice du repère orthonormé canonique (c'est-à-dire la droite d'équation $y = -x$).

62. Il suffit d'utiliser la formule donnant les coordonnées du milieu dans un repère.

63. a) Pour démontrer la formule, utiliser la relation $|u|^2 = u\bar{u}$.

b) La somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

c) Compléter le triangle en parallélogramme et utiliser le b). On obtient

$$4AI^2 = 2(AB^2 + CA^2) - BC^2.$$

64. Notons G le point d'affixe

$$g = \frac{a + b + c}{3}.$$

On veut vérifier que G appartient à chaque médiane du triangle. Il suffit, par symétrie, de le faire pour une des médianes. Notons C' le milieu de $[A, B]$. L'affixe de C' est

$$c' = \frac{a + b}{2}.$$

On a

$$c' - c = \frac{a + b - 2c}{2}, \quad g - c = \frac{a + b - 2c}{3}.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}.$$

65. Posons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel. Alors :

$$Z = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta) \right) + i \left(\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin(\theta) \right).$$

Il s'ensuit que Z est réel si et seulement si

$$\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\theta) = 0,$$

i.e. si et seulement si z est réel ou de module 1.

De même, Z est imaginaire pur si et seulement si

$$\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta) = 0,$$

i.e. si et seulement si $\cos(\theta) = 0$ ou encore si et seulement si z est imaginaire pur.

66. a) On écrit, puisque la raison z de la progression géométrique est différente de 1 :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0.$$

b) On a :

$$z + \frac{1}{z} = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) + \exp\left(-\frac{2i\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

c) On a d'abord :

$$x^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2.$$

En divisant la relation de a) par z^2 , on arrive à :

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

On résout cette équation du second degré. Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, le réel x est positif, d'où :

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

67. Si $z = e^{2i\pi/7}$, on a

$$\sum_{k=0}^6 z^k = 0, \quad x = z + \frac{1}{z}.$$

On divise par z^3 la première égalité, on note que

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2, \quad z^3 + \frac{1}{z^3} = x^3 - 3x.$$

Ainsi :

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

68. On écrit :

$$|a - b|^2 = (a - b) \overline{(a - b)} = (a - b) (\bar{a} - \bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}b),$$

$$|1 - \bar{a}b|^2 = (1 - \bar{a}b) \overline{(1 - \bar{a}b)} = 1 + |a|^2 |b|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}b).$$

Il s'ensuit que :

$$|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 - |a|^2) (1 - |b|^2) > 0.$$

69. L'expression est définie si et seulement si $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f(x) > 0 \iff x \in [0, 1[\cup]\sqrt{3}, 6].$$

70. a) Le réel x^2 décrit $\mathbb{R}^+$. Le réel x^3 décrit $[-8, +\infty[$. (Noter que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$, alors que $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$).

b) Le réel $1/x$ décrit $] -\infty, -1/4[\cup]1/5, +\infty[$. (Noter que la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$).

c) Le réel $x + y$ décrit $\mathbb{R}^{+*}$. Les réels xy et x/y décrivent $\mathbb{R}$. (Faire attention aux signes).

d) Le réel $x + y$ décrit $] -2, +\infty[$. Le réel xy décrit $[-6, +\infty[$. Le réel x/y décrit $\mathbb{R}$.

71. Il suffit d'écrire :

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

72. Notons x et $y = p - x$ les longueurs des côtés. L'aire du rectangle est

$$x(p - x),$$

maximale lorsque $x = p/2$ d'après le commentaire précédant l'exercice, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré.

73. Quitte à échanger a et b , on peut supposer $a \geq b$. Puisque les deux membres sont ≥ 0 , l'inégalité proposée équivaut à :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq a - b,$$

c'est-à-dire à :

$$a + b - 2\sqrt{ab} \leq a - b, \quad \text{i.e. } 2b \leq 2\sqrt{ab},$$

ce qui est vrai puisque $a \geq b$.

74. a) On a $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [3/2, 2]$.

b) On a $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [4/3, 2]$. (Discuter trois cas selon les signes de $x - 1$ et $2x - 3$).

c) On a $h(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$.

75. La probabilité que l'expérience échoue est $1 - p$. Par indépendance, la probabilité que l'expérience échoue n fois est donc $(1 - p)^n$. Ainsi

$$p_n = 1 - (1 - p)^n.$$

On a

$$p_n \geq \frac{1}{2} \iff n \geq \frac{\ln(2)}{-\ln(1 - p)}.$$

76. Si $m \in]-2, 2[$, p_m n'admet aucune racine réelle. Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, p_m admet deux racines réelles. Si m vaut 2 ou -2 , p_m a une racine réelle double.

77. On a

$$x^3 - x = a^3 - a \iff (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0.$$

Le trinôme $x^2 + ax + a^2 - 1$ a pour discriminant

$$4 - 3a^2.$$

Le nombre de racines du trinôme est donc 0, 1, ou 2 selon que $|a|$ est strictement supérieur, égal, ou strictement inférieur à $2/\sqrt{3}$.

D'autre part, a est racine du trinôme si et seulement si $a^2 = 1/3$, c'est-à-dire $a = \pm\sqrt{1/3}$.

Ainsi, si $|a| > 2/\sqrt{3}$, l'équation admet a pour seule racine. Si $a = \pm 2/\sqrt{3}$ ou $a = \pm 1/\sqrt{3}$, l'équation admet deux racines dans $\mathbb{R}$. Dans les autres cas, l'équation admet trois racines.

79. On a, pour x réel,

$$f(x) = Ax^2 + 2Bx + C$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Si tous les a_i sont nuls, l'inégalité proposée est satisfaite. Sinon, $A > 0$ et f est un trinôme du second degré. Comme f est à valeurs positives, le discriminant

$$\delta = 4(B^2 - AC)$$

est ≤ 0 , ce qui est le résultat désiré.

80. On a :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a},$$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{\Delta}{a^2}.$$

82. Les ensembles de définition sont laissés au lecteur. Les dérivées sont données par les formules suivantes.

$$a'(x) = 3x^2 \cos(5x+1) - 5x^3 \sin(5x+1), \quad b'(x) = -\sin x e^{\cos x}, \quad c'(x) = \ln(x)+1,$$

$$d'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad e'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}, \quad f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}e^{\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

$$g'(x) = \frac{e^x + \cos(x)}{e^x + \sin x}, \quad h'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad i'(x) = \frac{-2(x^2 - 2)\sin(2x) - 2x\cos(2x)}{(x^2 - 2)^2},$$

$$j'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x), \quad k'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2}, \quad \ell'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$m'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad (\text{utiliser } \ln(\sqrt{u}) = \frac{1}{2}\ln(u)).$$

$$n'(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \quad o'(x) = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}.$$

83. On a, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$f^{(4n)} = \cos, \quad f^{(4n+1)} = -\sin, \quad f^{(4n+2)} = -\cos, \quad f^{(4n+3)} = \sin.$$

Toujours pour n dans $\mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b}.$$

84. Supposons f paire. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

En dérivant cette égalité, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) = f'(x).$$

La fonction f' est impaire. Les autres arguments sont analogues.

86. a) Il suffit d'écrire :

$$\frac{(uv)'(x)}{(uv)(x)} = \frac{u(x)v'(x) + u'(x)v(x)}{u(x)v(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

c) Pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$\frac{P'}{P}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - a_i}.$$

87. La tangente au point d'abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ a pour pente

$$2a \frac{x_1 + x_2}{2} = a(x_1 + x_2).$$

La corde joignant les points d'abscisses x_1 et x_2 du graphe a pour pente :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2).$$

Les pentes sont égales, les tangentes sont parallèles.

88. a) La tangente au graphe au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Elle coupe l'axe (Ox) au point $(x_1, 0)$, x_1 étant déterminé par :

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

soit encore :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

89. a) La fonction ch est paire, la fonction sh est impaire. Toutes les deux tendent vers $+\infty$ en $+\infty$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x) = \text{sh}(x), \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x).$$

On en déduit que ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$

90. a) Il suffit de remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_a(x) \in \mathbb{R}^{+*}.$$

b) D'abord, pour $x > 0$:

$$f_a(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0.$$

Ensuite, pour $x \geq \sqrt{a}$,

$$f_a(x) - x = \frac{1}{2x} (a - x^2) \leq 0.$$

d) On a donc, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, 2^n est pair, d'où :

$$\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n} \geq 0.$$

On a d'autre part, grâce à la croissance de $(u_n)_{n \geq 1}$, la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq u_1.$$

L'inégalité demandée s'en déduit.

91. a) La fonction f est strictement croissante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$, vers $-\infty$ en $-\infty$. L'équation a une solution unique.

b) On a :

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}.$$

Par suite :

$$f(x_1) = \frac{-2}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} p + q, \quad f(x_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}} p + q.$$

Ainsi :

$$f(x_1) f(x_2) = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{\Delta}{27}.$$

c) Si $\Delta < 0$ (ce qui impose $p < 0$), l'équation admet trois solutions distinctes : une dans $] -\infty, x_1 [$, une dans $] x_1, x_2 [$, une dans $] x_2, +\infty [$.

Si $p < 0$ et $\Delta > 0$, l'équation admet une seule solution.

Si $\Delta > 0$ et $p \geq 0$, l'équation admet une seule solution.

Si $\Delta = 0$ et $p < 0$, i.e. si $\Delta = 0$ et $(p, q) \neq (0, 0)$, l'équation admet exactement deux solutions distinctes.

Enfin, si $p = q = 0$, l'équation admet 0 pour seule racine.

Cette discussion un peu laborieuse et le rôle de Δ seront éclaircis par la notion de *multiplicité d'une racine* d'un polynôme.

92. a) Pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, on a :

$$\left(\frac{P'}{P}\right)'(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x-a_i)^2}.$$

La fonction P'/P est donc strictement décroissante sur chacun des $n+1$ intervalles ouverts où elle est définie. Elle tend vers 0 en $\pm\infty$, vers $+\infty$ en a_i^+ et $-\infty$ en a_i^- .

b) Notons (taux de variation) que la dérivée de P en a_i est non nulle pour tout i . L'équation

$$P'(x) - \alpha P(x) = 0$$

équivalait donc à

$$\frac{P'}{P}(x) = \alpha.$$

La question a) montre que cette dernière équation admet, pour tout α , exactement une solution dans chaque $]a_i, a_{i+1}[$, $1 \leq i \leq n-1$. Si $\alpha = 0$, il n'y a pas d'autre racine. Si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) il y a une autre racine dans $]a_n, +\infty[$ (resp. $] -\infty, a_1 [$). Le nombre de racines est donc $n-1$ si α est nul, n sinon (ce qui est cohérent avec le degré de $P' - \alpha P$).

93. La fonction f est à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Comme elle est continue, l'image de I par f est un intervalle. Puisque $\{\pm 1\}$ n'est pas un intervalle, ceci impose que f est constante.

94. L'équation $f(x) = x$ s'écrit $g(x) = 0$ où :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = f(x) - x.$$

Or, g est continue sur $[0, 1]$ et

$$g(0) = f(0) \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

La conclusion suit du théorème des valeurs intermédiaires.

95. Poser, pour $x > 0$,

$$f(x) = x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x) - 2.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on a

$$f(n\pi) = e^{n\pi}(-1)^n - 2,$$

En particulier

$$f(n\pi) f((n+1)\pi) < 0,$$

et le résultat suit du théorème des valeurs intermédiaires.

96. Étudier

$$x \mapsto \sin(x) - x.$$

Le graphe est au-dessous de sa tangente en 0.

97. On a, pour x dans $\mathbb{R}^+$:

$$f'_n(x) = e^{-x} x^{n-1} (n - x).$$

La fonction f_n est croissante sur $[0, n]$, décroissante sur $[n, +\infty]$. Elle atteint son maximum en n et ce maximum vaut $(n/e)^n$.

98. Le minimum est atteint pour $x = 1/\sqrt{\lambda}$ et vaut

$$\frac{1}{2} (1 + \ln(\lambda)).$$

99. On a :

$$\forall x \in [a, b], \quad g'(x) = f'(x) - M \leq 0.$$

Il s'ensuit que g est décroissante, donc que

$$g(a) \geq g(b).$$

C'est la première des inégalités désirées.

100. On a, pour x dans I :

$$g'(x) = f'(x) - f'(a), \quad g''(x) = f''(x).$$

Ainsi $g'(a)$ est nul et g' est croissante sur I . Par conséquent, g' est négative ou nulle sur $I \cap]-\infty, a]$, positive ou nulle sur $I \cap [a, +\infty[$. La fonction g est ainsi décroissante sur $I \cap]-\infty, a]$, croissante sur $I \cap [a, +\infty[$, nulle en a . Il s'ensuit (tableau) que g est partout positive ou nulle, ce qui est le résultat voulu.

Cette étude sera précisée en classe de MP (*fonctions convexes*).

101. Dans l'ordre, les réponses sont 0, 1/4, 0, 0 (produit d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers 0), 0 (même argument que le précédent), 0 (poser $y = \ln(x)$ et noter que y tend vers $+\infty$ avec x), $+\infty$ (minorer $2 + \sin x$ par 1).

102. La réponse est 1 (grâce à l'encadrement

$$\frac{x-1}{x} < \frac{|x|}{x} \leq 1$$

et au théorème des gendarmes).

103. a) La limite de f en $+\infty$ est 0 (car $1/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $\sin(y)$ tend vers 0 lorsque y tend vers 0).

b) La fonction f n'a pas de limite en 0. On peut le justifier en notant, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $x_n = 1/n\pi$ et en remarquant que $(x_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(x_n) = (-1)^n,$$

ce qui montre que la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Il est recommandé de tracer le graphe de f .

c) Le produit d'une fonction bornée (ici $x \mapsto \sin(1/x)$) et d'une fonction tendant vers 0 (ici $x \mapsto x$) tend vers 0.

104. On écrit, pour k dans $\{1, \dots, n\}$:

$$\frac{k^2}{n} - 1 \leq \lfloor \frac{k^2}{n} \rfloor \leq \frac{k^2}{n}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

En utilisant l'exemple 1 page 9 et le théorème des gendarmes, il vient :

$$u_n \longrightarrow \frac{2}{3}.$$

105. On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$10^{N_n-1} \leq N < 10^{N_n}.$$

En appliquant la fonction croissante $\ln$ à cet encadrement et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(10)}.$$

106. Les réponses sont 0, 5, $1/2$, 1. Pour la troisième, on utilise les relations :

$$\frac{\ln(1+2x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2, \quad \frac{\sin(4x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 4.$$

107. Les réponses sont :

- 1 (factoriser le terme prépondérant $x \ln(x)$ dans le numérateur et le dénominateur) ;
- $+\infty$ (factoriser le terme prépondérant e^x dans le numérateur, le terme prépondérant x^{2013} dans le dénominateur) ;
- $1/2$ (factoriser le terme prépondérant e^x dans le numérateur et le dénominateur) ;
- 1 (factoriser le terme prépondérant $\ln(x)$ dans le numérateur et le dénominateur) ;
- $+\infty$ (factoriser le terme prépondérant x dans $\ln(j(x))$) ;
- $\frac{1}{2}$ (utiliser la quantité conjuguée puis factoriser par $\sqrt{x}$).

108. Les trois premières réponses sont :

$$x \mapsto \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{2 \cos(5x)}{5} + C, \quad x \mapsto -\frac{3e^{-4x}}{2} + C, \quad x \mapsto e^{e^x} + C.$$

Pour la dernière, il faut discuter. Pour $\alpha = -1$, les primitives sont les

$$x \mapsto \ln(\ln(x)) + C.$$

Pour $\alpha \neq -1$, ce sont les

$$x \mapsto \frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

109. Réponses : $\ln(3/2)$, $\frac{1}{2} \ln(35/32)$.

110. Les deux intégrales sont nulles. Montrons le pour la première. On écrit :

$$\cos(pt) \cos(qt) = \frac{1}{2} (\cos((p+q)t) + \cos((p-q)t)).$$

On intègre cette égalité sur $[0, 2\pi]$ et on utilise la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt) \, dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

111. a) Écrivons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ux + v.$$

Alors la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

$$\frac{1}{b-a} \left(\frac{u}{2} (b^2 - a^2) + v(b-a) \right) = \frac{u}{2} (a+b) + v = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Le résultat est d'ailleurs géométriquement évident.

b) Il suffit d'intégrer l'encadrement

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f(x) \leq M$$

sur $[a, b]$ et de diviser par $b-a$. Noter que le résultat est également géométriquement évident.

112. a) La fonction

$$x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) \, dt$$

a pour dérivée

$$x \mapsto f(x+T) - f(x) = 0$$

et est donc constante.

b) La valeur moyenne de $\cos$ est 0, celle de $\cos^2$ est $1/2$, celle de $|\cos|$ est $2/\pi$.

113. a) On écrit :

$$G(x) = F(2x) - F(x), \quad G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{x}.$$

b) On généralise le calcul précédent. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

114. Le a) est la formule de la somme d'une progression géométrique de raison $(-x)$. Le b) s'en déduit en intégrant entre 0 et 1 et en utilisant la linéarité de l'intégrale. Pour c), on écrit :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

On multiplie cette inégalité par t^{n+1} (qui est positif) et on termine à l'aide de la formule :

$$\int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}.$$

Le d) est une conséquence directe de b) et c). Enfin, pour e), on intègre le résultat de a) entre 0 et x . On obtient :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Pour montrer que la convergence subsiste si $-1 < x < 0$, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en prenant garde à l'ordre des bornes dans les intégrales et au fait que, pour t dans $[x, 0]$:

$$0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x},$$

(cette dernière majoration étant d'autant moins bonne que x est proche de -1). On obtient :

$$\forall x \in]-1, 0], \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1+x)}.$$

115. Pour la première question, noter que la dérivée de

$$f : x \mapsto \int_0^{\tan(x)} \frac{dt}{1+t^2}$$

est

$$(1 + \tan^2(x)) \times \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = 1.$$

et que f s'annule en 0. Ces deux conditions impliquent :

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad f(x) = x.$$

Le reste est très analogue à ce qui a été fait dans l'exercice 114.

116. Par linéarité de l'intégrale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = x^2 \int_a^b g^2(t) dt + 2x \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b f^2(t) dt.$$

La définition de $S(x)$ montre que $S(x)$ appartient à $\mathbb{R}^+$ (intégrale d'une fonction positive). Le discriminant du trinôme est donc négatif, ce qui est exactement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

117. Pour un polynôme réel p , on a :

$$\int_0^x p(t) \sin(t) dt = [-p(t) \cos(t)]_0^x + \int_0^x p'(t) \cos(t) dt.$$

Si p est de degré d , p' est de degré $d - 1$. On peut donc calculer l'intégrale en effectuant d intégrations par parties consécutives.

119. On intègre une première fois par parties :

$$f(x) = \left[\frac{1}{b} e^{at} \sin(bt) \right]_0^x - \int_0^x \frac{a}{b} e^{at} \sin(bt) dt = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{b} - \int_0^x \frac{a}{b} e^{at} \sin(bt) dt.$$

On intègre une seconde fois par parties :

$$\int_0^x e^{at} \sin(bt) dt = \left[e^{at} \frac{-\cos(bt)}{b} \right]_0^x + \int_0^x \frac{a}{b} e^{at} \cos(bt) dt.$$

En utilisant ce calcul, on obtient la valeur de

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) f(x)$$

à l'aide des deux crochets.

120. Supposons $q \geq p$. Une intégration par parties montre :

$$B(p, q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q+1).$$

En répétant cet argument, il vient

$$B(p, q) = \frac{(p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 1}{q \times (q+1) \times \cdots \times (p+q-2)} B(1, p+q-1).$$

Or :

$$B(1, p+q-1) = \frac{1}{p+q-1}.$$

Il en résulte :

$$B(p, q) = \frac{(p-1)! \times (q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Cette formule vaut également si $q < p$.

121. Une intégration par parties donne :

$$\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = \left[\frac{-\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t) \right]_a^b + \int_a^b f'(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt.$$

On majore les deux termes, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que le cosinus est borné par 1 :

$$\left| \left[\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t) \right]_a^b \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda},$$

$$\left| \int_a^b f'(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \frac{|\cos(\lambda t)|}{\lambda} dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| dt.$$

On en déduit l'inégalité demandée. La conclusion suit par comparaison.

Partie II

Approfondissements

Dans cette partie destinée aux aficionados, on entre de plain-pied dans le programme de première année de CPGE. Le choix des sujets présentés est dicté par les considérations suivantes.

- Continuer à conforter la maîtrise du calcul.
- Donner une première idée des mathématiques de CPGE.
- Présenter un certain nombre de résultats intéressants et assez rapidement accessibles au sortir de la classe de Terminale.

Ces contraintes ont conduit à développer les points suivants.

- Le volet algébrique est constitué de deux chapitres étroitement liés, proposant respectivement des compléments relatifs aux nombres complexes et une introduction aux polynômes et aux équations algébriques.

Ce choix a une certaine cohérence avec le développement historique des mathématiques : l'algèbre s'est en grande partie identifiée, jusqu'au milieu du dix-neuvième siècle, avec la théorie des équations.

- Le volet analytique propose des approfondissements des thèmes abordés dans la première partie (dérivation, limites, intégration). On introduit les fonctions puissances d'exposant non entiers, qui permettent une très grande variété d'applications.

Ici encore, ce choix est cohérent avec l'histoire. L'invention du calcul différentiel et intégral au dix-septième siècle est en effet le véritable acte de naissance de l'analyse. La mise au point de ces théories se poursuivra jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle. Parallèlement, le calcul différentiel et intégral recevra d'innombrables applications, aussi bien en mathématiques qu'en physique.

Cette partie est de niveau sensiblement plus élevé que la précédente. Son contenu sera intégralement repris en CPGE. Les divers chapitres peuvent être abordés indépendamment.

1 Nombres complexes, deuxième épisode

Les nombres complexes ont été introduits par les algébristes italiens de la Renaissance, non pas pour « résoudre » l'équation $x^2 = -1$ comme il serait tentant de le croire, mais afin d'obtenir des formules pour les solutions des équations de degré 3 analogues au

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de l'équation de degré 2. On trouvera quelques indications sur cette question dans l'exercice 158 (paragraphe **II.2.4**).

Il a été reconnu depuis longtemps que l'utilité des nombres complexes excède de très loin la résolution des équations du troisième degré, tant en mathématiques (selon Hadamard, « le plus court chemin entre deux vérités relatives aux nombres réels passe souvent par les complexes ») qu'en physique (électricité, physique ondulatoire, mécanique quantique). C'est un exemple, parmi de nombreux autres (dont beaucoup très récents), de l'efficacité que peuvent avoir des notions élaborées à des fins a priori purement théoriques pour décrire le réel.

Les compléments présentés dans ce chapitre seront intégralement repris en CPGE. Il est conseillé de les aborder dans l'ordre proposé. La technique de l'arc moitié, introduite en **1.1**, est utilisée dans la suite.

On constatera la coexistence de deux aspects, géométrique et algébrique. Cette dualité est une des manifestations de la richesse du sujet.

1.1 Technique de l'arc moitié

Pour θ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = 2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2} = 2 \sin(\theta/2) e^{i(\theta/2 + \pi/2)}.$$

Notons

$$Z = e^{i\theta} - 1.$$

On a alors les résultats suivants.

- Le module de Z est $|Z| = |2 \sin(\theta/2)|$.
- Si $\sin(\theta/2) > 0$, $\theta/2 + \pi/2$ est un argument de Z , alors que, si $\sin(\theta/2) < 0$, $\theta/2 + 3\pi/2$ est un argument de Z .

La technique de l'arc moitié fonctionne également pour $e^{i\theta} + 1$. En effet :

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}.$$

En fait, dans la plupart des applications, on utilise uniquement cette formule et la jumelle

$$e^{i\theta} - 1 = 2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}$$

sans se préoccuper des arguments.

Exercice 122 (F). Soient α et β deux réels,

$$Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}.$$

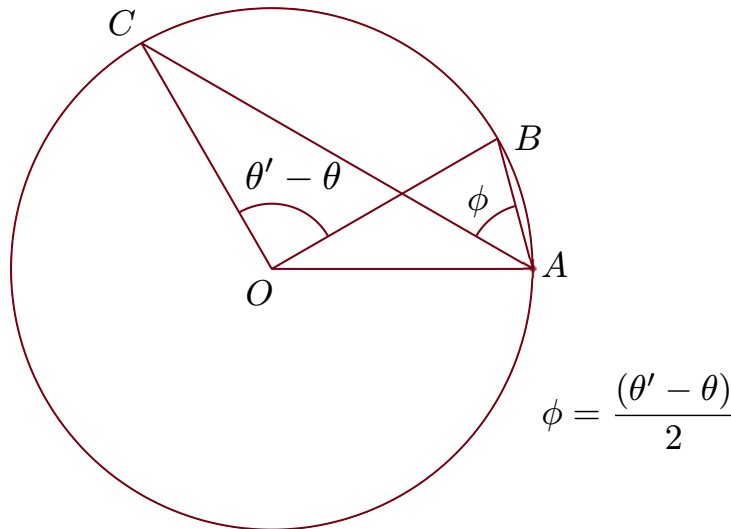
En factorisant $e^{i\alpha}$ dans Z , trouver le module de Z et, si Z est non nul, un argument de Z .

Remarque Application au théorème de l'angle inscrit

La transformation précédente entraîne le *théorème de l'angle inscrit*. Soient en effet θ et θ' dans $]0, 2\pi[$ avec $\theta < \theta'$, A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives $1, e^{i\theta}, e^{i\theta'}$, O le point d'affixe 0. L'angle au centre $\widehat{O\vec{B}, O\vec{C}}$ est $\theta' - \theta$. L'angle inscrit est $\widehat{A\vec{B}, A\vec{C}}$. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ correspondent respectivement aux complexes $e^{i\theta} - 1$ et $e^{i\theta'} - 1$. Le quotient

$$\frac{e^{i\theta'} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\sin(\theta'/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i\frac{(\theta' - \theta)}{2}}$$

a pour argument $(\theta' - \theta)/2$: l'angle au centre est le double de l'angle inscrit. Cette remarque est illustrée par le dessin ci-après.



1.2 Calcul de sommes trigonométriques

On rencontre fréquemment des sommes du type :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx), \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

avec n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$. Le calcul de ces sommes est standard. On pose :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx},$$

de sorte que $C_n(x)$ et $S_n(x)$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $U_n(x)$. Or, $U_n(x)$ étant la somme d'une progression géométrique, le calcul de $U_n(x)$ est facile. Si x est de la forme $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $U_n(x)$ vaut $n+1$, d'où :

$$C_n(x) = n+1, \quad S_n(x) = 0.$$

Dans le cas contraire, la raison e^{ix} de la progression géométrique apparaissant dans U_n est différente de 1, ce qui conduit, via la technique de l'arc moitié, à :

$$U_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, il vient :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad S_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 123 (AD). *Montrer, pour x réel et n entier ≥ 2 :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

Exercice 124 (AD). *Soient x un nombre réel, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme*

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

et montrer que :

$$\sin(x/2) K_n(x) \geq 0.$$

1.3 Racines de l'unité

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Les nombres complexes z tels que $z^n = 1$, appelés encore *racines n -ièmes de 1* ou *racines n -ièmes de l'unité*, interviennent dans un grand nombre de questions. Nous allons les déterminer.

Écrivons z sous la forme $re^{i\theta}$ avec θ réel et r dans $\mathbb{R}^+$. La relation $z^n = 1$ équivaut à :

$$r^n = 1 \text{ et } e^{in\theta} = 1$$

ou encore à

$$r = 1 \text{ et } n\theta \in 2\pi\mathbb{Z},$$

enfin à

$$r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2ik\pi}{n}.$$

D'autre part, pour k et k' dans $\mathbb{Z}$, l'égalité

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2ik'\pi}{n}\right)$$

équivalent à

$$\frac{2\pi(k' - k)}{n} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire au fait que n divise $k' - k$. On a établi le résultat suivant.

Théorème 3 (Racines de l'unité). *L'équation*

$$z^n = 1$$

admet exactement n racines complexes, à savoir les :

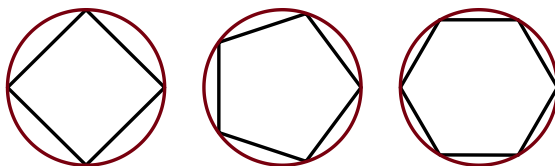
$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\},$$

ou encore :

$$1, \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right), \exp\left(\frac{4i\pi}{n}\right), \dots, \exp\left(\frac{2i(n-1)\pi}{n}\right).$$

Les images des racines n -ièmes de l'unité dans le plan complexe sont les points du cercle unité d'arguments $0, 2\pi/n, 4\pi/n, \dots, (n-1)\pi/n$ modulo 2π . Ce sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets centré en 0 et dont un des sommets est égal à 1.

On a représenté ci-dessous les polygones réguliers, dont les sommets ont pour affixe les racines n -ièmes de l'unité, pour $n = 4, 5$ et 6.



Exemples

1. Pour $n = 2$, les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
2. Pour $n = 3$, les racines cubiques de 1 sont 1,

$$j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Les notations j et j^2 sont très utilisées. Noter que $j^2 = \bar{j}$.

3. Pour $n = 4$, les racines quatrièmes de 1 sont 1, i , -1 , $-i$.

Exercice 125 (F). *a) Écrire sous la forme $a+ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les racines sixièmes de 1.*

b) Écrire sous la forme $a+ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les racines huitièmes de 1.

Exercice 126 (F). *Calculer le produit des racines n -ièmes de 1, c'est-à-dire :*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right).$$

Exercice 127 (AD). Soit n un entier ≥ 3 . On note L_n et A_n la longueur et l'aire du polygone (régulier) dont les sommets sont les racines n -ièmes de 1. Donner une expression simple de L_n et de A_n . Déterminer les limites des suites $(L_n)_{n \geq 3}$ et $(A_n)_{n \geq 3}$.

Exercice 128 ((D) Rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel). On se propose de déterminer les rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit un nombre rationnel. On considère un tel rationnel r . On écrit :

$$2 \cos(\pi r) = \frac{a}{b}$$

où a est dans $\mathbb{Z}$, b dans $\mathbb{N}^*$ et où la fraction a/b est irréductible. Pour k dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$u_k = 2 \cos(2^k \pi r).$$

- a) Pour k dans $\mathbb{N}$, exprimer u_{k+1} en fonction de u_k .
- b) Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, u_k est rationnel. Si on écrit $u_k = a_k/b_k$ où a_k est dans $\mathbb{Z}$, b_k dans $\mathbb{N}^*$, la fraction a_k/b_k irréductible, exprimer b_{k+1} en fonction de b_k .
- c) On écrit $r = p/q$ avec p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$. En remarquant que, pour k dans $\mathbb{N}$, $\exp(i 2^k \pi r)$ est une racine $2q$ -ième de 1, montrer que l'ensemble

$$\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$$

est fini. En déduire que l'on peut choisir k_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que b_{k_0} soit maximal.

d) En utilisant $k_0 + 1$, montrer que b_{k_0} vaut 1, puis que $2 \cos(\pi r)$ est entier. Conclure.

Exercice 129 (D). Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. À quelle condition a-t-on l'inclusion $U_m \subset U_n$?

Soit p dans $\mathbb{N}$. Calculons, à titre d'illustration, la somme des puissances p -ièmes des racines n -ièmes de 1, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{i 2kp\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{i 2p\pi}{n}\right)\right)^k.$$

On distingue deux cas.

- Si n divise p , la raison $\exp\left(\frac{i 2p\pi}{n}\right)$ de la progression géométrique est 1. La somme vaut n .
- Si n ne divise pas p , la raison $\exp\left(\frac{i 2p\pi}{n}\right)$ est différente de 1. La somme vaut

$$\frac{1 - \left(\exp\left(\frac{i 2p\pi}{n}\right)\right)^n}{1 - \exp\left(\frac{i 2p\pi}{n}\right)}.$$

Mais le numérateur est

$$1 - \exp(i 2\pi p) = 0.$$

La somme considérée est donc nulle.

Exercice 130 (D). Soient n un entier ≥ 2 , P un polynôme de degré au plus $n - 1$. Montrer :

$$P(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

Ainsi, la valeur en 0 d'un polynôme P de degré majoré par $n - 1$ est la moyenne des valeurs de P sur les racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 131 (D). Soit n un entier ≥ 2 . Déterminer les complexes z tels que :

$$(z - i)^n = (z + i)^n.$$

On pourra noter qu'une solution z de cette équation est nécessairement différente de i et réécrire l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^n = 1.$$

Si Z est un complexe non nul, la recherche des racines n -ièmes de Z dans $\mathbb{C}$ s'effectue comme précédemment. Nous y reviendrons dans les remarques du paragraphe **II.2.4**.

1.4 La formule du binôme

La formule du binôme généralise les identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

On adopte la convention usuelle

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^0 = 1.$$

Théorème 4. Soient n un élément de $\mathbb{N}$, a et b des nombres complexes. Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Explicitement :

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Notons que la formule peut également s'écrire, par symétrie des coefficients binomiaux :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve. Fixons a et b dans $\mathbb{C}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ l'assertion :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Puisque

$$\binom{0}{0} = 1,$$

la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On a alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) (a+b)^n,$$

soit encore, grâce à $\mathcal{P}_n$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)$$

ou encore

$$(a+b)^{n+1} = a \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) + b \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right),$$

c'est-à-dire :

$$(1) \quad (a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right).$$

Isolons le terme correspondant à $k=0$ de la première somme, le terme correspondant à $k=n$ de la seconde. Il vient :

$$(2) \quad (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right) + b^{n+1}.$$

Dans la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

effectuons le changement d'indice $j = k+1$, de sorte que j décrit $\{1, \dots, n\}$ lorsque k décrit $\{0, \dots, n-1\}$. Il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j.$$

La variable de sommation étant muette, cette somme peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

La formule (2) entraîne alors :

$$(3) \quad (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k \right) + b^{n+1}.$$

En utilisant, pour k dans $\{1, \dots, n\}$, la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

et les égalités

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1,$$

on obtient bien :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.

Exemples

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En prenant $b = 1$, on obtient, pour tout nombre complexe a :

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

Notons que la première égalité est également vraie pour $n = 0$, contrairement à la seconde (car ici, comme toujours en algèbre, s'applique la convention $0^0 = 1$).

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n = \left(2 \cos(x/2) e^{ix/2}\right)^n = 2^n (\cos(x/2))^n e^{inx/2}.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de cette égalité, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n (\cos(x/2))^n \cos(nx/2),$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) = 2^n (\cos(x/2))^n \sin(nx/2).$$

3. En posant $a = x$ dans l'égalité de l'exemple 1 et en dérivant par rapport à x , on obtient, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n (1+x)^{n-1}.$$

4. Formule de Moivre et application

Soient x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$. On a

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx} = (\cos(x) + i \sin(x))^n.$$

Cette relation est la *formule de Moivre*. En développant le second membre avec la formule du binôme et en identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient des expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Par exemple, pour $n = 3$:

$$\cos(3x) + i \sin(3x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) + i (3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x)).$$

Donc :

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x),$$

$$\sin(3x) = 3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x).$$

5. Linéarisation

On peut également utiliser la formule du binôme pour écrire $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ comme combinaison de fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), \quad x \mapsto \sin(kx), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Il suffit de partir des *formules d'Euler* :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

d'élever ces formules à la puissance n et de développer le second membre par la formule du binôme. Par exemple :

$$\sin^3(x) = \frac{-1}{8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x).$$

6. Inégalité de Bernoulli

Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, x un élément de $\mathbb{R}^+$. En notant que tous les termes $\binom{n}{k} x^k$, $k \in \{2, \dots, n\}$ sont ≥ 0 , on obtient l'inégalité de Bernoulli :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exercice 132 (AD). Pour x dans $\mathbb{R}$, donner une expression simple de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{ikx}.$$

En déduire des expressions simples de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cos(kx), \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sin(kx).$$

Exercice 133 (AD). Pour n dans $\mathbb{N}$, x dans $\mathbb{R}$, donner une expression simple de :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Exercice 134 (AD). Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n) la somme des $\binom{n}{k}$ pour k décrivant l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) de $\{0, \dots, n\}$. Calculer A_n et B_n . On pourra considérer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$ et utiliser l'exemple 1 ci-dessus.

Les trois exercices suivants sont des applications des exemples 4 et 5 ci-dessus. Ils seront repris de manière plus conceptuelle dans le chapitre suivant.

Exercice 135 ((F,*)). Trouver deux fonctions polynomiales P et Q telles que, pour tout réel x , on ait :

$$\cos(4x) = P(\cos(x)), \quad \sin(4x) = \sin(x) Q(\cos(x)).$$

Exercice 136 ((F,*) Linéarisation). a) Écrire $x \mapsto \cos^3(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, \dots, 3\}.$$

b) Écrire $x \mapsto \cos^4(x)$ comme combinaison linéaires des fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, \dots, 4\}.$$

Exercice 137 ((D,*) Linéarisation, cas général). Soit n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction :

$$x \mapsto \cos^n(x)$$

est une combinaison linéaire des fonctions :

$$x \mapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

b) Calculer en utilisant a) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(x) dx.$$

Le dernier exercice ne concerne pas les nombres complexes. Sa présence ici s'explique car la démonstration demandée est calquée sur celle de la formule du binôme ; il existe d'ailleurs un cadre conceptuel permettant une généralisation commune des deux résultats.

Exercice 138 ((D,*) Formule de Leibniz). Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n -ième du produit fg est donnée par la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

1.5 Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-a}{b-a}$

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan. La relation

$$\frac{c-a}{b-a} = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in \mathbb{R},$$

se traduit géométriquement par les deux conditions suivantes, qui mettent respectivement en jeu le rapport des longueurs et l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$(1) \quad AC = r AB,$$

$$(2) \quad \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \theta [2\pi]$$

Ainsi, A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

De même, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Les relations précédentes ont les conséquences suivantes. Soient a et b deux nombres complexes distincts, $\mathcal{D}$ la droite passant par les points d'affixes a et b dans le plan complexe. L'image du point M d'affixe z est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z-a}}{\overline{b-a}},$$

ce qui s'écrit comme une relation linéaire en z et $\bar{z}$. De même, si c est un troisième nombre complexe, le point M d'affixe z est sur la perpendiculaire à AB passant par C si et seulement si

$$\frac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)}.$$

Les deux exercices ci-après utilisent ces remarques pour établir les résultats classiques relatifs à la droite et au cercle d'Euler d'un triangle. Il est évidemment possible d'établir ces jolis théorèmes par des raisonnements géométriques directs.

Exercice 139 ((D) Droite d'Euler d'un triangle). *On suppose que a, b, c appartiennent à U .*

a) *Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?*

b) *Soit M un point du plan, d'affixe z . En remarquant que le conjugué d'un point de U est égal à son inverse, montrer que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de C si et seulement si*

$$\bar{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}.$$

c) Montrer que les trois hauteurs de ABC concourent au point d'affixe

$$h = a + b + c.$$

d) Montrer que dans un triangle quelconque ABC , l'orthocentre H , le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O sont alignés et vérifient la relation d'Euler

$$\overrightarrow{OH} = 3 \overrightarrow{OG}.$$

Exercice 140 ((TD) Cercle d'Euler d'un triangle). On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) Montrer que le cercle de rayon $1/2$ et dont le centre a pour affixe $h/2$ contient les milieux des côtés de ABC , les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets, les pieds des hauteurs.

b) Énoncer le théorème établi dans un triangle quelconque.

1.6 L'inégalité triangulaire

On appelle *inégalité triangulaire* le résultat fondamental suivant.

Théorème 5. Soient a et b deux nombres complexes. Alors :

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Preuve. Puisque les deux quantités sont positives, les comparer revient à comparer leurs carrés. Or :

$$|a+b|^2 = (a+b) \overline{(a+b)} = (a+b) (\bar{a} + \bar{b}) = a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}b),$$

tandis que :

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|.$$

Par conséquent, posant $z = \bar{a}b$:

$$(|a| + |b|)^2 - |a+b|^2 = 2(|ab| - \operatorname{Re}(\bar{a}b)) = 2(|z| - \operatorname{Re}(z)).$$

Il est clair géométriquement que, pour tout nombre complexe z , on a :

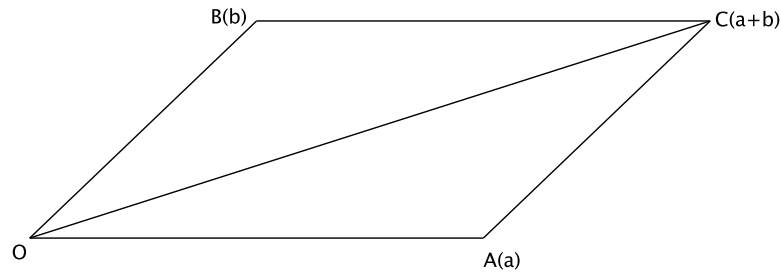
$$|z| \geq \operatorname{Re}(z).$$

La preuve de cette inégalité est du reste immédiate. Posant $z = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$, l'inégalité $y^2 \geq 0$ et la croissance de la fonction racine carrée entraînent :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2},$$

Comme $\sqrt{x^2} = |x| \geq x$, le théorème suit.

La signification de l'inégalité triangulaire est illustrée par le dessin ci-dessous : la distance de l'origine O au point C d'affixe $a + b$ est plus petite que la somme de la distance de O au point A d'affixe a et de la distance de A au point C . En d'autres termes, la ligne droite est le plus court chemin !



Exercice 141 ((D,*) Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire). a) Déterminer les nombres complexes z tels que :

$$|z| = \operatorname{Re}(z).$$

b) Soient a et b deux nombres complexes. Montrer que l'on a

$$|a + b| = |a| + |b|$$

si et seulement si les points d'affixes a et b sont sur une même demi-droite issue de 0.

L'inégalité triangulaire se généralise facilement à la somme de n nombres complexes.

Théorème 6. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Alors :

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

Preuve. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « pour toute famille $z_1, \dots, z_n$ de nombres complexes :

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|. \quad \sim$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes. Posons :

$$a = \sum_{i=1}^n z_i, \quad b = z_{n+1}.$$

On a :

$$(1) \quad a + b = \sum_{i=1}^{n+1} z_i.$$

L'inégalité triangulaire pour deux nombres complexes donne

$$(2) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Grâce à $\mathcal{P}_n$, on a d'autre part :

$$(3) \quad |a| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

En sommant (2) et (3) et en tenant compte de (1), on obtient :

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

Exercice 142 ((D,*) Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire). *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité du théorème 6 soit une égalité.*

2 Polynômes

Pendant longtemps, l'algèbre s'est identifiée avec la « résolution des équations algébriques », c'est-à-dire la recherche des racines des polynômes. Les polynômes sont par ailleurs des objets mathématiques centraux, tant en algèbre qu'en analyse. Ils fournissent ainsi une liste inépuisable de thèmes d'exercices et de problèmes en CPGE.

Nous avons rencontré les polynômes à plusieurs reprises dans la partie I : trinôme du second degré (paragraphe I.4.2), détermination d'une équation polynomiale à coefficients entiers satisfaite par $\cos(2\pi/5)$, puis par $\cos(2\pi/7)$ (exercices 66 et 67), nombre de racines d'équations polynomiales réelles (exercices 91 et 92). Dans le chapitre II.1, les polynômes interviennent également à plusieurs reprises (racines de 1, applications trigonométriques de la formule du binôme).

Cette partie propose une introduction élémentaire aux polynômes, afin notamment de « voir de plus haut » les exemples précédents. On s'autorise le léger abus de langage consistant à employer simultanément « polynôme » « fonction polynôme » ou « fonction polynomiale ».

2.1 Polynômes

Les sommes indexées permettent d'écrire de manière claire des polynômes de degré arbitraire. Notons $\mathbb{K}$ l'un des deux ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *fonction polynôme* ou *fonction polynomiale* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction de la forme :

$$x \in \mathbb{K} \longmapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Plus précisément, une fonction de la forme précédente est dite *polynomiale de degré au plus n* .

Bien évidemment une fonction polynomiale à coefficients réels peut être vue, puisque $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$, comme une fonction polynomiale à coefficients complexes.

L'énoncé suivant dit que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale P détermine les coefficients a_k . Il justifie donc un certain nombre de raisonnements par identification.

Théorème 7. Soient $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des nombres complexes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k.$$

Alors :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = b_k.$$

Preuve abrégée. Pour x dans $\mathbb{R}^*$, on divise par x^n l'égalité obtenue des deux côtés :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sum_{k=0}^n a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^n b_k x^{k-n}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, le premier membre tend vers a_n , le second vers b_n . On a donc :

$$a_n = b_n.$$

En revenant alors à l'hypothèse et en divisant cette fois par x^{n-1} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-(n-1)}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on a maintenant :

$$a_{n-1} = b_{n-1}.$$

Il reste à répéter cet argument. La mise en forme requiert une récurrence dont la formalisation est laissée au lecteur.

Si P n'est pas identiquement nulle, on peut donc écrire de manière unique :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$. On dit alors que n est le *degré* de P et que a_n est le *coefficient dominant* de P . Ainsi, une fonction polynomiale de degré 0 est constante non nulle, une fonction polynomiale de degré 1 est affine non constante etc.

Notons au passage le fait simple suivant : si P et Q sont deux fonctions polynomiales non identiquement nulles de degrés respectifs m et n , de coefficients dominant respectifs a et b , alors

$$x \longmapsto P(x) Q(x)$$

est une fonction polynomiale de degré $m + n$, de coefficient dominant ab .

Remarques

1. On a utilisé dans la preuve précédente la notion de limite pour une fonction complexe, non définie en Terminale. Cette notion, étudiée en première année de CPGE, ne présente pas de difficulté. Via l'écriture d'un nombre complexe en termes de partie réelle et partie imaginaire, elle se ramène en fait au cas réel.
2. La démonstration précédente fait appel à un argument d'analyse. Dans le paragraphe **II.2.3**, on établira de manière plus algébrique un énoncé plus fort (théorème 11).
3. *Polynômes pairs, impairs*
Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Supposons P paire :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = P(-x).$$

Alors :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = (-1)^k a_k.$$

Cette égalité équivaut au fait que a_k est nul pour k impair. Une fonction polynomiale est donc paire si et seulement si elle est de la forme :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^m a_k x^{2k}.$$

On caractérise de même les polynômes impairs.

Exercice 143 ((F,*)). *Que dire du degré de la somme de deux fonctions polynomiales ?*

Exercice 144 ((D,*) Fonctions polynomiales périodiques). *Soit T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Quelles sont les fonctions polynomiales à coefficients réels P telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+T) = P(x) ?$$

Il existe de nombreuses familles « classiques » de polynômes. Les polynômes de Bernoulli ont été évoqués dans le paragraphe **I.2.3**. Les polynômes H_k de l'exercice ci-après sont, à une normalisation près, les polynômes de Hilbert.

Exercice 145 (D). *Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose :*

$$H_j(x) = x(x+1) \dots (x+j-1).$$

a) *Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, calculer*

$$H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1).$$

b) *En déduire, pour j et n dans $\mathbb{N}^*$, la somme*

$$\sum_{k=1}^n H_j(k).$$

c) *Retrouver les sommes calculées dans le chapitre **I.2** :*

$$\sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n k^3.$$

La famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exercice ci-après est celle des polynômes de Tchébycheff. Elle a de très nombreuses applications.

Exercice 146 ((D,*) Polynômes de Tchébycheff). *Pour n dans $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe une fonction polynomiale T_n telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(t)) = \cos(nt).$$

2.2 Racines d'un polynôme

Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et r un élément de $\mathbb{K}$, on dit que r est racine de P si et seulement si

$$P(r) = 0.$$

Les deux premiers exercices n'utilisent que la définition des racines.

Exercice 147 (AD). a) Si n est un entier pair, donner un exemple de polynôme à coefficients réels n'admettant pas de racine réelle.

b) Si n est un entier impair et p un polynôme à coefficients réels de degré n , montrer que p admet au moins une racine réelle. On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, cf la remarque à la fin du paragraphe **I.5.3.1**.

Exercice 148 ((AD,*)). Soient P une fonction polynomiale à coefficients réels, z dans $\mathbb{C}$ une racine de P . Montrer que $\bar{z}$ est racine de P .

Exercice 149 ((D,*) Majoration du module des racines d'un polynôme). Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes. Montrer que tout nombre complexe tel que

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0$$

vérifie :

$$|z| \leq \max \left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right).$$

Le résultat ci-après est fondamental. Il sera repris sous un angle un peu différent en première année de CPGE.

Théorème 8. Soient P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), r un élément de $\mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) r est racine de P ;
- (ii) il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = (x - r) Q(x).$$

Preuve. L'implication (ii) $\implies$ (i) est évidente. Prouvons la réciproque. Supposons (i) et écrivons :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

où $a_0, \dots, a_n$ sont dans $\mathbb{K}$. On a, pour x dans $\mathbb{K}$:

$$P(x) = P(x) - P(r) = \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k r^k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - r^k).$$

Le terme correspondant à $k = 0$ de cette somme est nul. Par ailleurs, pour $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$x^k - r^k = (x - r) \left(\sum_{j=0}^{k-1} r^{k-1-j} x^j \right).$$

En combinant ces deux résultats et la linéarité de la somme, on voit que l'on peut bien écrire :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = (x - r) Q(x)$$

où Q est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} r^{k-1-j} x^j \right).$$

L'application Q est polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 150 (AD). a) Vérifier que 4 est racine de l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Déterminer une « racine évidente » de l'équation :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du théorème précédent admet une généralisation utile.

Théorème 9. Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $x_1, \dots, x_m$ des racines de P dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes. Il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k) Q(x).$$

Preuve. Montrons par récurrence sur l'élément m de $\mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_m$: si P est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ admettant m racines distinctes $x_1, \dots, x_m$ dans $\mathbb{K}$, alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k) Q(x).$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème précédent.

Supposons $\mathcal{P}_m$ vraie. Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ admettant $m + 1$ racines distinctes $x_1, \dots, x_{m+1}$ dans $\mathbb{K}$. En particulier

$x_1, \dots, x_m$ sont des racines de P , ce qui donne, grâce à $\mathcal{P}_m$ une fonction polynomiale R à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k) R(x).$$

Comme x_{m+1} est racine de P et n'appartient pas à $\{x_1, \dots, x_m\}$, R admet x_{m+1} pour racine. Il existe donc, grâce au théorème précédent, une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad R(x) = (x - x_{m+1}) Q(x).$$

On obtient en fin de compte :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \prod_{k=1}^{m+1} (x - x_k) Q(x).$$

La propriété $\mathcal{P}_{m+1}$ est établie.

Exemple Factorisation de $z^n - 1$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Les n racines n -ièmes de 1 vérifient l'équation

$$z^n - 1 = 0.$$

Il existe donc une fonction polynomiale Q à coefficients complexes telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) Q(z).$$

La comparaison des coefficients dominants montre que Q est identiquement égale à 1. On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

Exercice 151 (D). Soit n un entier ≥ 2 .

a) Justifier la formule

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{j=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ij\pi}{n}} \right).$$

b) En appliquant la formule précédente en $z = 1$, calculer :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right).$$

Le théorème 9 a la conséquence fondamentale suivante.

Théorème 10. Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$, P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Preuve. Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que si les $x_k, 1 \leq k \leq n+1$ sont racines de P , alors P est identiquement nulle. Le résultat s'en déduira. Grâce au théorème précédent, le fait que $x_1, \dots, x_{n+1}$ soient racines de P impose l'existence d'une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in K, \quad P(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) Q(x).$$

Si Q n'était pas identiquement nulle, on aurait, en notant d le degré de Q :

$$n = (n+1) + d.$$

Cette égalité est évidemment contradictoire.

Exercice 152 (D). Soit P une fonction polynomiale de degré au plus $n \geq 2$ à coefficients réels. Montrer que le graphe de P ne peut contenir $n+1$ points distincts alignés.

2.3 Rigidité

Les résultats du paragraphe précédent permettent de démontrer l'énoncé ci-après, qui est une manifestation remarquable de la *rigidité des polynômes* : une application polynomiale de degré inférieur ou égal à n est déterminée par ses valeurs en $n+1$ points.

Cette propriété (déjà observée dans un cas particulier dans l'exercice 130), est une amélioration considérable du théorème d'unicité 7. Elle n'est pas surprenante. Une fonction polynomiale P de degré n est déterminée par $n+1$ coefficients. Il est donc raisonnable d'espérer que les $n+1$ conditions correspondant aux valeurs en $n+1$ points déterminent P . En première année de CPGE, le cours d'algèbre linéaire permettra de rendre rigoureux ce raisonnement heuristique.

Théorème 11. Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n+1\}, \quad \sum_{k=0}^n a_k x_j^k = \sum_{k=0}^n b_k x_j^k.$$

Alors :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = b_k.$$

Preuve. Posons, pour x dans K :

$$R(x) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) x^k = \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n b_k x^k.$$

Le polynôme R est de degré $\leq n$ et admet $n+1$ racines distinctes. Ses coefficients sont donc tous nuls, ce qui est le résultat désiré.

Ce théorème est un moyen très efficace d'établir des égalités polynomiales. Il admet le corollaire suivant : si deux applications polynomiales coïncident sur un ensemble infini, elles sont égales. La première question de l'exercice ci-après est une application de ce dernier point.

Exercice 153 ((D,*)) Polynômes de Tchébycheff, suite). a) Pour n dans $\mathbb{N}$, montrer l'unicité du polynôme T_n vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(t)) = \cos(nt).$$

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad T_n(z) + T_{n+2}(z) = 2zT_{n+1}(z).$$

c) Pour n dans $\mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .

d) Montrer que la fonction polynomiale T_n est paire si n est pair, impaire si n est impair.

e) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, déterminer les réels t tels que $\cos(nt) = 0$.

f) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, établir la factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right).$$

Exercice 154 (TD). a) En dérivant l'égalité qui définit T_n , montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, il existe une unique fonction polynomiale U_n tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t) U_n(\cos(t)) = \sin(nt).$$

Préciser le degré, le coefficient dominant, la parité de U_n .

b) Pour quels n existe-t-il une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(nt) = P(\sin(t)) ?$$

L'exercice ci-après précise le théorème 11 par une formule permettant de reconstituer une fonction polynomiale de degré au plus n à l'aide de ses valeurs sur $n+1$ point distincts. Cette formule, que vous reverrez en CPGE, a de très nombreuses applications.

Exercice 155 ((TD). Formule d'interpolation de Lagrange). Soient n dans $\mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour j dans $\{0, \dots, n\}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right).$$

a) Montrer que, pour j et k dans $\{0, \dots, n\}$, $L_j(x_k)$ vaut 0 si $j \neq k$, 1 si $j = k$.

b) Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n . Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k(x).$$

2.4 L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Le programme de Terminale comporte l'étude des équations du second degré à coefficients réels. La mise sous forme canonique est en fait également valable pour les équations à coefficients complexes. Soient en effet a, b, c dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour z dans $\mathbb{C}$, on peut écrire :

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

On a ainsi :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Ce calcul ramène la résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à la recherche des racines carrées d'un nombre complexe. Or on a le résultat suivant.

Théorème 12. Soit Z dans $\mathbb{C}^*$. L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 = Z$$

admet exactement deux racines dans $\mathbb{C}$. Ces deux racines sont opposées.

Nous indiquons deux démonstrations de ce résultat, fondées respectivement sur l'écriture algébrique et l'écriture trigonométrique.

Preuve 1. Écrivons $Z = a + ib$ avec (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ et cherchons z sous la forme $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La relation $z^2 = Z$ équivaut au système de deux équations :

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

- Si $b = 0$ et $a > 0$, le système équivaut à :

$$x^2 = a, \quad y = 0,$$

soit :

$$z = \pm \sqrt{a}.$$

- Si $b = 0$ et $a < 0$, le système équivaut à :

$$x^2 = 0, \quad y^2 = -a,$$

soit :

$$z = \pm i\sqrt{-a}.$$

- Si $b \neq 0$, le système équivaut à :

$$x \neq 0, \quad y = \frac{b}{2x}, \quad x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a.$$

La dernière équation s'écrit, en posant $t = x^2$:

$$t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Vu que $-b^2/4 < 0$, cette équation admet deux racines non nulles et de signes opposés. Seule la racine positive

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

est un carré. On obtient bien deux possibilités opposées pour x . Comme la valeur de x impose celle de y , le résultat est établi. Notons que ce raisonnement conduit à la formule

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \right),$$

qu'il serait bien entendu absurde d'apprendre par coeur !

Preuve 2. Écrivons donc $Z = re^{i\theta}$ avec r dans $\mathbb{R}^{+*}$, θ dans $\mathbb{R}$ et cherchons z sous la forme ρe^{it} avec ρ dans $\mathbb{R}^+$, t dans $\mathbb{R}$. La relation $z^2 = Z$ équivaut au système :

$$\rho^2 = r, \quad 2t \equiv \theta [2\pi],$$

c'est-à-dire à :

$$\rho = \sqrt{r}, \quad t \equiv \frac{\theta}{2} [\pi].$$

On obtient bien deux solutions : $\pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}$.

Remarques

1. Absence d'une fonction racine carrée raisonnable sur $\mathbb{C}$

Un réel positif est le carré de deux nombres réels opposés dont un seul est positif. Cette circonstance permet de définir sans ambiguïté la racine carrée $\sqrt{x}$ de l'élément x de $\mathbb{R}^+$ comme le seul réel ≥ 0 dont le carré est x . Il n'existe aucune manière naturelle de définir une fonction racine carrée sur le plan complexe. La notation $\sqrt{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$ est donc proscrite.

2. Retour sur la preuve 1

Reprenons les notations de la preuve 1. En pratique, on peut simplifier un peu les calculs en observant que z vérifie forcément

$$|z|^2 = |Z|,$$

c'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On connaît donc la somme et la différence de x^2 et y^2 , à savoir a et $\sqrt{a^2 + b^2}$. On en déduit x^2 et y^2 , ce qui donne a priori quatre valeurs possibles pour le couple (x, y) . Les deux qui conviennent sont celles qui vérifient la relation manquante :

$$2xy = b.$$

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul

La preuve 2 est analogue à la démonstration du théorème 3 (racines n -ièmes de l'unité). Les deux démonstrations admettent une généralisation commune. En admettant que tout élément r de $\mathbb{R}^{+*}$ admet une unique racine n -ième notée $\sqrt[n]{r}$ ou $r^{1/n}$ (cf chapitre II.4), on établit que tout nombre complexe non nul admet exactement n racines n -ièmes dans $\mathbb{C}$ dont on détermine la forme trigonométrique.

Exercice 156 (AD). Déterminer les racines carrées de $-3 + 4i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 157 (AD). Montrer que si z appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, alors z admet une unique racine carrée dont la partie réelle est strictement positive.

En combinant la forme canonique au résultat précédent, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 13. Soient a, b, c des nombres complexes, avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet deux racines distinctes z_1 et z_2 si $\Delta \neq 0$, une racine double $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$. On a :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve. Le premier point résulte du travail précédent. Pour le second, on peut utiliser les expressions de z_1 et z_2 , mais il est de loin préférable d'observer que l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2),$$

d'où par identification

$$b = -a(z_1 + z_2), \quad c = az_1 z_2.$$

On peut lire « à l'envers » la seconde partie de ce résultat : deux nombres complexes z_1 et z_2 de somme s et de produit p sont tous les deux racines de l'équation :

$$z^2 - sz + p = 0.$$

La généralisation des formules donnant somme et produit d'une équation de degré 2 sont l'objet du paragraphe suivant.

Nous avons déterminé dans l'exercice 91 le nombre de racines réelles d'une équation de degré 3 :

$$x^3 + px + q = 0$$

lorsque p et q sont réels. L'exercice ci-après donne une méthode ramenant la recherche des racines d'une équation complexe de degré 3 à l'extraction de racines carrées et cubiques (pour une introduction formelle de ces dernières, voir le chapitre II.4).

Exercice 158 ((D). Résolution de l'équation de degré 3 par la méthode de Cardan). On se propose d'indiquer une des méthodes élaborées par les algébristes italiens de la Renaissance pour résoudre l'équation du troisième degré.

a) Soient a, b, c des complexes et P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^3 + az^2 + bz + c.$$

Trouver un complexe h tel qu'il existe p et q dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z + h) = z^3 + pz + q.$$

On a donc :

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(z + h) = 0$$

où le polynôme Q est défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) = z^3 + pz + q.$$

La recherche des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est ainsi ramenée au problème analogue pour l'équation $Q(z) = 0$. Le polynôme Q a l'avantage sur P de ne pas comporter de terme en z^2 . Nous allons donc expliquer comment résoudre :

$$(1) \quad Q(z) = 0.$$

b) Soit z un nombre complexe. Expliquer pourquoi il existe deux nombres complexes u et v (éventuellement égaux) tels que :

$$z = u + v, \quad 3uv = -p.$$

c) On écrit le complexe z sous la forme $u + v$ où $3uv = -p$. Montrer que l'équation (1) se réécrit

$$u^3 + v^3 = -q.$$

d) À partir des relations :

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

déterminer une équation du second degré dont u^3 et v^3 sont racines.

Remarque Résolution de l'équation de degré 3, suite

On a ainsi ramené l'équation de degré 3 à une équation du second degré, ce qui en permet la « résolution ». La suite du travail est simple mais fastidieuse. On résout l'équation du second degré obtenue. On en tire les valeurs possibles de u^3 , puis de u . On détermine v à partir de la relation $3uv = -p$ et on en déduit finalement x . On obtient les *formules de Cardan*, spectaculaires mais inexploitable en pratique. Noter que ces formules font intervenir des racines carrées et des racines cubiques (ces dernières étant définies dans le chapitre **II.4** mais sans doute déjà connues du lecteur).

Exercice 159 (D). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - 6z - 40 = 0$$

en appliquant la méthode de l'exercice précédent. En déduire :

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Exercice 160 ((D). Résolution de l'équation de degré 4 par la méthode de Ferrari). On se propose d'indiquer comment une équation de degré 4 peut être ramenée à une équation de degré 3. La méthode utilisée dans la question a) de l'exercice précédent permet de se borner au cas d'une équation de la forme $P(z) = 0$ où :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^4 + pz^2 + qz + r, \quad \text{avec } (p, q, r) \in \mathbb{C}^3.$$

a) Soit λ un nombre complexe. Expliciter un polynôme complexe T_λ de degré au plus 2 tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - T_\lambda(z).$$

b) Montrer que T_λ est le carré d'un polynôme de degré au plus 1 si et seulement si λ vérifie une équation de degré 3 que l'on précisera. En déduire une méthode de résolution d'une équation du quatrième degré.

Remarque Le théorème de d'Alembert-Gauss

On a établi dans ce texte que les équations polynomiales du second degré à coefficients complexes et les équations de la forme

$$z^n - a = 0$$

admettaient au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Les deux exercices précédents montrent qu'il en est de même des équations de degré 3 et 4. Le *théorème de d'Alembert-Gauss*, énoncé en première année de CPGE, assure qu'il en est de même de toute équation polynomiale de degré $n \geq 1$. Ce résultat est l'un des plus fondamentaux des mathématiques.

En revanche, il n'existe pas de méthode de résolution des équations de degré ≥ 5 généralisant celles qui existent pour les degrés ≤ 4 . La démonstration d'une forme précise de ce résultat est un des points de départ de l'algèbre « moderne » (Galois, vers 1830). Mais c'est là une autre histoire !

2.5 Somme et produit des racines d'un polynôme

Il est en général impossible d'expliciter simplement les racines d'une équation algébrique. En revanche, certaines quantités liées aux racines se lisent directement sur les coefficients du polynôme. Soient en effet $a_0, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{K}, \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n \prod_{j=1}^n (x - x_j)$$

avec $a_n \neq 0$. En développant, on voit que le coefficient de x^{n-1} dans le membre de droite est

$$-a_n \times \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)$$

alors que le coefficient constant est :

$$(-1)^n \prod_{j=1}^n x_j.$$

Par identification des coefficients, on en déduit :

$$\sum_{j=1}^n x_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \prod_{j=1}^n x_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Ces formules généralisent celle vues pour le trinôme du second degré. Elles seront revues et généralisées en CPGE : les coefficients d'un polynôme donnent accès aux *fonctions symétriques élémentaires des racines*, résultat énoncé par Viète.

Exercice 161 (D). a) Déterminer le coefficient de x^{n-2} dans le membre de droite de (1).

b) Exprimer :

$$\sum_{j=1}^n x_j^2$$

en fonction de a_n, a_{n-1}, a_{n-2} .

La somme et le produit des racines n -ièmes de 1 ont été calculés dans la paragraphe **I.3.2**. On peut les retrouver moins économiquement à partir des relations précédentes.

Exercice 162 (AD). Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n -ièmes de 1 à partir de la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

Exercice 163 (D). En utilisant l'exercice 67, calculer la somme et le produit des trois réels

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Les deux exercices suivants montrent l'intérêt qu'il peut y avoir à voir des nombres complexes comme les racines d'une équation polynomiale.

Exercice 164 (D). Soient a, b, c trois nombres complexes. On note P le polynôme unitaire défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

On écrit aussi

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = x^3 - sx^2 + ux - p.$$

a) Exprimer s, u, p en fonction de a, b, c .

b) En sommant l'égalité

$$a^3 = sa^2 - ua + p$$

et les relations analogues pour b et c , obtenir une identité remarquable relative à

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Exercice 165 (TD). *On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose que a, b, c sont dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $abc = 1$ et que*

$$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Montrer que l'un exactement des trois réels a, b, c est strictement > 1 .

3 Dérivation, deuxième épisode

On complète ici l'étude de la dérivation par trois applications importantes, qui seront toutes reprises en première année de CPGE.

3.1 Caractérisation des fonctions constantes

Une application importante de la dérivation est le résultat suivant : une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ y est constante si et seulement elle y est dérivable de dérivée identiquement nulle. Ce résultat sera établi en première année de CPGE.

Exercice 166 ((F,*). Fonctions à dérivée n -ième nulle). *Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée n -ième est identiquement nulle.*

Exercice 167 ((AD,*). Pendule simple). *Considérons un pendule simple de masse m et de longueur ℓ . L'angle θ que fait le pendule avec la « verticale descendante » dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :*

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2\theta'(t)^2}{2} - mg\ell \cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

Exercice 168 ((AD,*). Dérivation et parité). *Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

a) Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

On pourra considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f(-x).$$

b) Montrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et $f(0) = 0$.

Exercice 169 ((D,*). Dérivation et périodicité). *Soient f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.*

a) On suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période T telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + \lambda x.$$

Montrer que f' est périodique de période T .

b) Formuler et démontrer une réciproque du résultat établi en a).

3.2 L'équation différentielle $y' = \lambda y$

La caractérisation des fonctions constantes entraîne la conséquence suivante.

Théorème 14 (Caractérisation des fonctions exponentielles). *Si λ est un réel, les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :*

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda f(x)$$

sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto C e^{\lambda x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\lambda x} g(x)$$

où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons voir que (1) équivaut au fait que g est constante, ce qui donnera le résultat désiré.

L'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) e^{-\lambda x}$$

montre que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{\lambda x} (g'(x) + \lambda g(x)).$$

Puisque $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f vérifie l'équation différentielle (1) si et seulement si g' est nulle, c'est-à-dire si g est constante.

Remarques

1. Signification de l'équation différentielle précédente

Interprétons $f(t)$ comme la valeur au temps t d'une certaine quantité. Dire que f vérifie une équation différentielle de la forme (1), c'est dire que la variation instantanée de f est proportionnelle à f . La simplicité de ce modèle est une des raisons de l'ubiquité de l'exponentielle en sciences. Certains exemples ont été vus en Terminale (radioactivité, croissance d'une population).

2. Solution prenant une valeur donnée en un point donné

Pour tout x_0 de $\mathbb{R}$ et tout y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique solution de (1) prenant la valeur y_0 en x_0 , correspondant au choix :

$$C = e^{-\lambda x_0} y_0.$$

C'est le premier exemple d'un phénomène fondamental : la détermination d'une fonction par une équation différentielle d'ordre 1 et une condition initiale.

Exercice 170 ((F,*). Temps de demi-vie). *Une certaine quantité d'une substance décroît exponentiellement en fonction du temps en obéissant à la loi :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad N(t) = C e^{-Kt},$$

où les constantes C et K sont > 0 . Déterminer le temps de demi-vie, c'est-à-dire l'instant t tel que

$$N(t) = C/2.$$

Exercice 171 ((AD)). Une bactérie se développe avec un taux d'accroissement proportionnel à la population, c'est-à-dire que le nombre de bactéries à l'instant t obéit à l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad N'(t) = KN(t)$$

où K est une constante > 0 . La population passe de 10^6 individus à $2 \cdot 10^6$ en 12 minutes. Combien de temps faut-il pour passer de 10^6 individus à 10^8 ?

Le problème géométrique proposé dans l'exercice suivant (dit « de de Beaune ») est anecdotique ; c'est cependant une des origines de l'exponentielle.

Exercice 172 ((AD). Courbes de sous-tangente constante). Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tout réel x , la tangente au graphe de f en x n'est pas parallèle à l'axe (Ox) et, si $N(x)$ désigne le point d'intersection de cette tangente et de (Ox) , la distance de $N(x)$ à la projection orthogonale du point d'abscisse x du graphe de f sur l'axe (Ox) est constante.

Exercice 173 ((AD,*). Caractérisation des exponentielles par leur équation fonctionnelle). On se propose de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

a) Soit f une fonction vérifiant les conditions précédentes. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)f(x).$$

b) Conclure.

3.3 La condition nécessaire d'extremum

Un autre résultat étroitement lié aux considérations précédente, un peu plus théorique mais très important, est la condition nécessaire d'extremum, établie en première année de CPGE.

Théorème 15 (Condition nécessaire d'extremum). Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum (maximum ou minimum) en un point x_0 de I , alors :

$$f'(x_0) = 0.$$

Ce résultat, découvert lors des débuts du calcul différentiel (Fermat), sera démontré en PCSI et MPSI. Il sert classiquement de point de départ pour établir le théorème des accroissements finis (exercice 99), le lien entre variations et signe de la dérivée. Il a de très nombreuses autres applications.

Remarques

1. Le théorème ne donne qu'une condition nécessaire : la dérivée de la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$$

s'annule en 0, mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier n'a pas d'extremum en 0.

2. Le caractère ouvert de l'intervalle est essentiel : la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto x$$

admet un minimum en 0, un maximum en 1, mais est de dérivée constante égale à 1.

Exemple. *Réfraction de la lumière*

Cet exemple non évident est un des premiers succès du calcul différentiel. Il explique la *loi de Snell-Descartes* sur la réfraction de la lumière. Supposons que la droite D , que nous prenons comme axe (Ox) , partage le plan en deux milieux (les demi-plans $y > 0$, $y < 0$) dans lesquels la vitesse de la lumière est respectivement v_1 et v_2 . Soient $M_1 = (a_1, b_1)$, $M_2 = (a_2, b_2)$ avec $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ et, pour fixer les idées, $a_1 < a_2$ (faire un dessin).

On cherche le trajet minimisant le temps de parcours de la lumière de M_1 à M_2 , c'est-à-dire le point $M = (x, 0)$ tel que :

$$T(x) = \frac{\sqrt{(x - a_1)^2 + b_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - a_2)^2 + b_2^2}}{v_2}$$

soit minimal. Pour un tel x , on a $T'(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{x - a_1}{v_1 \sqrt{(x - a_1)^2 + b_1^2}} + \frac{x - a_2}{v_2 \sqrt{(x - a_2)^2 + b_2^2}} = 0.$$

Cette égalité montre que x est dans $]a_1, a_2[$ et que, si α_1 et α_2 sont les angles respectifs de (M_1M) et (M_2M) avec la perpendiculaire à D en M , alors :

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}.$$

Cette égalité est la loi de Snell-Descartes. Le raisonnement précédent montre que cette loi se déduit d'un « principe variationnel » simple.

Exercice 174 ((D). Distance d'un point à un graphe). Soient f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, M_0 un point de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au graphe de f . On note (x_0, y_0) les coordonnées de M_0 . Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $M(x)$ le point du graphe de f d'abscisse x , c'est-à-dire le point de coordonnées $(x, f(x))$. On suppose que la distance de M_0 au graphe de f est atteinte au point de paramètre x_1 , ce qui signifie que la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \left\| \overrightarrow{M_0 M(x)} \right\|$$

est minimale en x_1 .

Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\psi(x) = \varphi(x)^2$ en fonction de $x, x_0, y_0, f(x)$. Calculer ensuite $\psi'(x)$. En déduire que la droite $(M_0 M(x_1))$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1 .

Il est recommandé de faire un dessin.

4 Les fonctions puissances

Les fonctions puissances sont des objets naturels et utiles. Leurs propriétés généralisent sans grande surprise celles, déjà connues, des exposants entiers. Nous verrons dans les exercices qu'elles fournissent beaucoup d'applications intéressantes de la dérivation.

Définition

Les fonctions puissances entières :

$$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

peuvent, très utilement, être généralisées de la façon suivante. Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On remarquera que, pour α non entier, x^α n'est défini que pour $x > 0$. Noter également que x^α appartient à $\mathbb{R}^{+*}$.

Propriétés algébriques

Pour α et β dans $\mathbb{R}$, on déduit immédiatement des propriétés du logarithme et de l'exponentielle les relations :

- (1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha;$
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta};$
- (3) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$

Ces propriétés généralisent sans surprise des résultats connus pour les exposants entiers. En voici deux conséquences utiles.

1. En prenant $\beta = -\alpha$ dans (2), on voit que l'inverse de x^α est $x^{-\alpha}$.
2. Supposons α non nul. Pour x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$x^\alpha = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{1/\alpha}.$$

Le cas particulier des racines n -ièmes

La formule (2) implique en particulier, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x.$$

Le point 2 ci-dessus montre que le réel $x^{1/n}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^{+*}$ dont la puissance n -ième vaut x . On le note aussi $\sqrt[n]{x}$ et on l'appelle *racine n -ième de x* .

Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée : $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$. Rappelons la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Dérivée

Le calcul de la dérivée de :

$$\varphi_\alpha : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^\alpha$$

se déduit facilement du calcul de la dérivée d'une composée. On écrit :

$$\varphi_\alpha = v \circ u$$

où v est la fonction exponentielle et où u est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u(x) = \alpha \ln(x).$$

On a :

$$\varphi'_\alpha(x) = u'(x) v'(u(x)) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha.$$

En utilisant (2) avec $\beta = -1$, on en déduit la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Là encore, cette formule généralise celle connue pour les exposants entiers.

Monotonie

Le calcul de la dérivée de φ_α montre que cette fonction est

- strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $\alpha > 0$;
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $\alpha < 0$;

Pour $\alpha = 0$, on retrouve la fonction constante égale à 1.

Comportement aux bornes

Supposons $\alpha > 0$. On vérifie que x^α tend vers 0 en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$ si $\alpha > 0$. Dans ce cas et dans ce cas seulement, on convient souvent de poser $0^\alpha = 0$, c'est-à-dire de prolonger la fonction par continuité en 0.

Supposons $\alpha < 0$. Alors x^α tend vers $+\infty$ en 0^+ et 0 en $+\infty$ pour $\alpha < 0$.

Comparaison de deux fonctions puissances

Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$, x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Comparons x^α et x^β . On distingue deux cas.

- Si $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$, donc (multiplication d'une inégalité par un réel positif) : $\alpha \ln(x) \leq \beta \ln(x)$. Par croissance de exp, on a donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad x^\alpha \leq x^\beta.$$

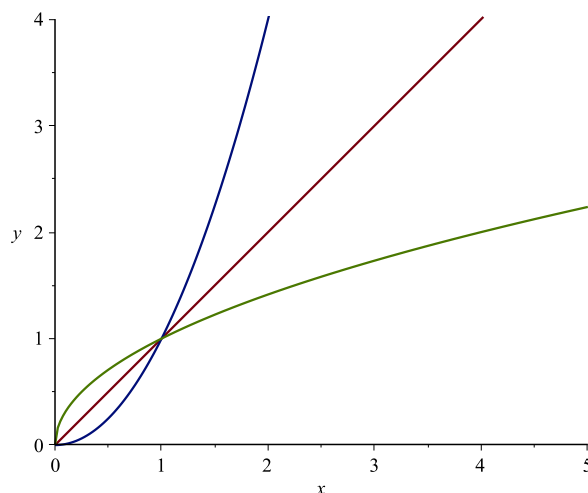
Cette inégalité est stricte pour $x > 1$.

- Si $x \leq 1$, $\ln(x) \leq 0$, donc (multiplication d'une inégalité par un réel négatif) : $\alpha \ln(x) \geq \beta \ln(x)$. Par croissance de exp, on a donc :

$$\forall x \in]0, 1], \quad x^\alpha \geq x^\beta.$$

Cette inégalité est stricte pour $x < 1$.

En résumé, si $\alpha < \beta$, x^α est plus grand que x^β sur $[1, +\infty[$ et plus petit sur $]0, 1]$. On retrouve ce résultat en se représentant, sur un même dessin, le graphe de $x \mapsto x$ ($\alpha = 1$, première bissectrice) et celui de $x \mapsto x^2$ ($\alpha = 2$, parabole), dessin que l'on complète profitablement par le graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$.



Graphes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$.

Exercice 175 (F). Déterminer la limite de $\frac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 176 (F). Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer la dérivée nième de

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^\alpha.$$

Exercice 177 (F). a) Soient u une fonction dérivable définie sur l'intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, v une fonction dérivable définie sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$w(x) = u(x)^{v(x)}.$$

Calculer la dérivée de w .

b) Écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^x$$

au point d'abscisse 1.

Exercice 178 (AD). a) Étudier la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

b) En utilisant la question précédente, déterminer les couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a < b$ et :

$$a^b = b^a.$$

c) Dédurre de a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/n} \leq 3^{1/3}.$$

Exercice 179 (AD). Soit α un élément de $]1, +\infty[$. En étudiant une fonction judicieuse, montrer :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Donner l'équation de la tangente au graphe de

$$x \mapsto (1+x)^\alpha$$

en 0 et interpréter géométriquement l'inégalité précédente.

L'inégalité de Bernoulli établie en Terminale est le cas particulier de l'inégalité précédente où α est un entier naturel et x un élément de $\mathbb{R}^+$ (cf **II.1.4**).

Exercice 180 ((AD,*). Les fonctions $x \mapsto a^x$). Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On note ψ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_a(x) = a^x = \exp(\ln(a)x).$$

a) Calculer la dérivée de ψ_a .

b) Déterminer les limites de $\psi_a(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$. On discutera selon la position de a par rapport à 1.

c) Tracer les graphes de ψ_2 , de $\psi_{1/2}$.

Exercice 181 (F). Déterminer la limite de $\frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 0$) lorsque x tend vers 0.

Exercice 182 ((AD). Un problème d'optimisation géométrique). On considère une boîte fermée en forme de cylindre droit. La base est un disque de rayon $r > 0$, la hauteur du cylindre est $h > 0$. On note S l'aire latérale de la boîte, V son volume.

a) Justifier les relations :

$$S = 2\pi(r^2 + rh), \quad V = \pi r^2 h.$$

b) On suppose que V est fixé. En utilisant la relation

$$S = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right)$$

et en étudiant la fonction :

$$f : r \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto r^2 + \frac{V}{\pi r},$$

dire comment choisir r et h pour que S soit minimale.

Exercice 183 (AD). On généralise ici l'exercice 73. Soit α un élément de $]0, 1[$.

a) En étudiant une fonction judicieuse, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (1+x)^\alpha \leq 1+x^\alpha.$$

b) Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ avec $y > x$. Montrer :

$$y^\alpha - x^\alpha \leq (y-x)^\alpha.$$

Exercice 184 ((D). L'inégalité de Young). Soit p un réel > 1 .

a) Montrer qu'il existe un unique réel q tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Vérifier que q (que l'on appelle parfois exposant conjugué de p) est > 1 . Déterminer q pour $p = 2$, puis si $p = 4$.

b) On fixe y dans $\mathbb{R}^{+*}$ et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Donner le tableau de variations de f .

c) Conclure :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Exercice 185 ((D,*). L'inégalité de Hölder pour les intégrales). Les notations p, q sont celles de l'exercice précédent, dont on utilise également le résultat. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

On remarquera que, pour $p = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice 116).

a) En utilisant l'inégalité de Young, montrer, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_a^b |f(t)|^p dt + \frac{1}{q\lambda^q} \int_a^b |g(t)|^q dt.$$

b) Déterminer le minimum de la fonction :

$$\psi : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\lambda^p}{p} \int_a^b |f(t)|^p dt + \frac{1}{q\lambda^q} \int_a^b |g(t)|^q dt.$$

Conclure.

Exercice 186 ((D,*). L'inégalité arithmético-géométrique, preuve 1). Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété suivante, que l'on appelle $\mathcal{P}_n$:

pour toute famille $x_1, \dots, x_n$ de réels > 0 , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.

La démonstration proposée dans cet exercice est due à Cauchy.

On note A l'ensemble des n de $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

a) Montrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si $\mathcal{P}_n$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_{2n}$.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_n$.

On pourra, si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, poser :

$$x_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

d) Conclure à l'aide de l'exercice 8.

Remarques À propos de l'inégalité arithmético-géométrique

1. Moyenne arithmétique, moyenne géométrique

Les réels

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

sont appelés respectivement *moyenne arithmétique* et *moyenne géométrique* de la famille $x_1, \dots, x_n$, ce qui justifie le nom de l'inégalité. On notera que le cas $n = 2$ a été traité dans l'exercice 71.

2. Reformulation de l'inégalité

On peut reformuler l'inégalité arithmético-géométrique de la façon suivante. Si les réels $x_1, \dots, x_n$ sont strictement positifs et ont pour produit p , leur somme est minorée par $n \sqrt[n]{p}$, avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux à $\sqrt[n]{p}$. Autre reformulation : si des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$ ont pour somme S , leur produit est majoré par $(S/n)^n$, avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux à S/n .

Exercice 187 ((D). L'inégalité arithmético-géométrique, preuve 2). On rappelle que, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\ln(x) \leq x - 1,$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$ (paragraphe **I.5.3.2**).

On se donne un entier $n \geq 1$ et une famille $x_1, \dots, x_n$ des réels > 0 . On pose, pour $1 \leq i \leq n$:

$$y_i = \frac{n x_i}{x_1 + \dots + x_n}.$$

En appliquant l'inégalité précédente aux y_i et en sommant les inégalités obtenues, retrouver que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.

L'inégalité arithmético-géométrique a de nombreuses conséquences. Les deux exercices suivants en sont des applications à des problèmes d'optimisation géométrique.

Exercice 188 ((D). Volume maximal d'un parallélépipède rectangle d'aire latérale fixée). Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs a, b, c . Le volume du parallélépipède est noté V .

a) Calculer V en fonction de a, b, c . Expliquer pourquoi l'aire latérale du parallélépipède est

$$S = 2(ab + bc + ca).$$

b) Montrer que

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq V^{2/3}.$$

À quelle condition y a-t-il égalité ?

c) Quelle est le volume maximal d'un parallélépipède d'aire latérale S donnée ? Pour quels parallélépipèdes est-il atteint ?

Exercice 189 ((D). Inégalité isopérimétrique pour les triangles). Soit ABC un triangle. On note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB . Le demi-périmètre de ABC est noté p :

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

L'aire de ABC est notée S .

a) Établir la formule de Héron :

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

b) En déduire l'inégalité :

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral. Ainsi, parmi les triangles de périmètre fixé, l'aire maximale est atteinte pour les triangles équilatéraux.

5 Calcul des limites, deuxième épisode

Les fonctions puissances apparaissent constamment dans les questions asymptotiques. Cet court chapitre les utilise pour compléter sur deux points les méthodes de calcul de limites présentées dans la première partie.

5.1 Croissances comparées usuelles

Il est essentiel de savoir comparer asymptotiquement les fonctions usuelles.

En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances, les puissances l'emportent sur le logarithme. Précisément, pour tout $\alpha > 0$.

$$\frac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour $\alpha = 1$, ces résultats ont été établis dans le cours de Terminale. Prouvons le premier. Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, soit

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}.$$

La dérivée de f_α est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} (\alpha - x).$$

Il s'ensuit que, sur $[\alpha, +\infty[$, f'_α est négative et f_α est décroissante. Notant M_α le réel $f_\alpha(\alpha)$, on a donc :

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[, \quad 0 \leq f_\alpha(x) \leq M_\alpha.$$

À ce stade, on a simplement montré que f_α est bornée sur $[\alpha, +\infty[$. Observons maintenant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{x} f_{\alpha+1}(x).$$

Comme $f_{\alpha+1}$ est bornée sur $[\alpha+1, +\infty[$, f_α , produit d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers 0 en $+\infty$, tend vers 0 en $+\infty$.

En $-\infty$, l'exponentielle l'emporte également sur les puissances, ce que l'on peut écrire :

$$|x|^\alpha e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

En effet, il suffit de poser $x = -y$ pour se ramener en $+\infty$.

Comparons enfin deux fonctions puissances, en $+\infty$ et en 0, ce qui complètera les inégalités obtenues dans le chapitre II.4.

- Lorsque x tend vers $+\infty$, x^α est d'autant plus grand que α est grand. En effet, si $\alpha < \beta$, $\alpha - \beta < 0$ de sorte que :

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

- Lorsque x tend vers 0^+ , x^α est d'autant plus grand que α est petit. En effet, si $\alpha < \beta$, $\alpha - \beta < 0$ de sorte que :

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Exercice 190 (F). Trouver la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}x^2, \quad g(x) = e^{-x^2}x^{10000}, \quad h(x) = \ln(x)^8 e^{-x},$$

$$i(x) = \frac{1,0001^x}{x^{2013}}, \quad j(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}.$$

Exercice 191 (F,*). Trouver la limite en 0^+ de

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x)$$

si $\alpha > 0$. On pourra poser $y = 1/x$.

L'exercice ci-après fait établir que la suite $(n!)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ plus rapidement que toute suite géométrique, résultat annoncé à la fin du paragraphe **I.2.5**.

Exercice 192 ((D,*). Croissance comparée de la suite des factorielles et d'une suite géométrique). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$.

a) On suppose qu'il existe k dans $]0, 1[$ et N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k.$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.

b) On suppose que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \geq 0}$ tend vers un réel ℓ de $[0, 1[$. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.

c) Soit a dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer :

$$\frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque Sur la condition de la question a) de l'exercice précédent

Le résultat de la question a) de l'exercice précédent appelle une précision. L'hypothèse est l'existence d'un entier naturel N et d'un élément k de $]0, 1[$ tels que :

$$(1) \quad \forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k.$$

La condition (1) entraîne

$$(2) \quad \forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Mais (1) est beaucoup plus forte que (2) : dans (1), k est en effet indépendant de $n \geq N$. D'ailleurs, toute suite strictement décroissante de réels > 0 vérifie (1) (avec $N = 0$). Or, une telle suite ne converge pas forcément vers 0 : si ℓ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ell + \frac{1}{n}$$

est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, strictement décroissante, convergente vers ℓ .

5.2 Utilisation de la forme exponentielle

Lorsqu'on a affaire à des fonctions de la forme

$$f : x \mapsto u(x)^{v(x)},$$

il est souvent utile de revenir à la *forme exponentielle* :

$$f(x) = \exp(v(x) \ln(u(x))).$$

Pour calculer la limite de $f(x)$ en un point de $\mathbb{R}$ ou en $\pm\infty$, il suffit de calculer la limite de $v(x) \ln(u(x))$ et de prendre l'exponentielle du résultat.

Notons que si $u(x)$ tend vers 1 et $v(x)$ vers $+\infty$, $\ln(u(x))$ tend vers 0, de sorte « 1^∞ » est une forme indéterminée. Il en est de même de ∞^0 .

Exemples

1. Déterminons la limite de $f(x) = x^{1/x}$ en $+\infty$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Comme, par croissance comparée :

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

il vient :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

2. (*) Une approximation de l'exponentielle

Soit x dans $\mathbb{R}$. Déterminons la limite de

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

quand l'entier n tend vers $+\infty$. Pour $n > -x$, $1 + \frac{x}{n} > 0$, de sorte que :

$$u_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n}\right) \quad \text{où} \quad y_n = \frac{x}{n}.$$

Or, la forme indéterminée

$$\frac{\ln(1 + y)}{y}$$

est le taux d'accroissement en 0 de la fonction $y \mapsto \ln(1 + y)$. Elle tend donc vers la dérivée de cette fonction en 0, qui est égale à 1. En exponentiant, on obtient :

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

Exercice 193 (AD). Trouver les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

L'exemple et cet exercice illustrent le caractère indéterminé de la forme 1^∞ .

Exercice 194 (AD). Trouver la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}.$$

6 Intégration, deuxième épisode

L'étude de l'intégrale est ici complétée par plusieurs applications. On présente tout d'abord deux conséquences classiques de l'intégration par parties, moins immédiates que celles proposées dans la partie **I** : les intégrales de Wallis et le développement en série entière de l'exponentielle. Dans un second temps, on présente la méthode de comparaison d'une somme et d'une intégrale et on en déduit quelques estimations.

6.1 Quelques applications de l'intégration par parties

Nous présentons deux calculs classiques. Le premier, celui des *intégrales de Wallis*, est un passage quasi-obligé en CPGE ; le résultat a joué historiquement un rôle important, que la présentation actuelle ne permet pas de deviner immédiatement. Le second est le « développement de l'exponentielle en série entière », c'est-à-dire la formule fondamentale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

Les intégrales de Wallis

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

Ces intégrales se retrouvent dans plusieurs contextes. Nous allons exprimer W_n en fonction de n . On remarque d'abord que :

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = 1.$$

L'étape essentielle du calcul est l'obtention d'une relation entre W_{n+2} et W_n . Cette relation s'obtient via une intégration par parties. On écrit :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos t \times (\cos t)^{n+1} dt.$$

Posons donc, pour t dans $[0, \pi/2]$:

$$u(t) = (\cos t)^{n+1}, \quad v(t) = \sin t$$

de sorte que :

$$u'(t) = -(n+1) \sin t (\cos t)^n, \quad v'(t) = \cos t.$$

Puisque :

$$v(0) = u(\pi/2) = 0,$$

on a :

$$\int_0^{\pi/2} u'(t) v(t) dt = - \int_0^{\pi/2} u(t) v'(t) dt,$$

c'est-à-dire :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 (\cos t)^n dt.$$

En écrivant

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2(t),$$

il vient :

$$W_{n+2} = (n+1) (W_n - W_{n+2}).$$

Autrement dit :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Par conséquent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad W_{2k} = \frac{(2k-1).(2k-3) \dots 3.1}{(2k)(2k-2) \dots 4.2} \times \frac{\pi}{2},$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{2k+1} = \frac{(2k).(2k-2) \dots 4.2}{(2k+1).(2k-1) \dots 3}.$$

On peut écrire ces produits au moyen de factorielles.

On a déjà calculé quelques « produits infinis » à l'aide de moyens purement algébriques (télescopes) dans les exercices 36, 37, 46. L'exercice ci-après établit une relation plus profonde obtenue par Wallis (1655).

Exercice 195 ((D,*). Le produit de Wallis). a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$W_{n+1} \leq W_n.$$

b) En utilisant la relation de récurrence obtenue dans l'exemple 3 ci-dessus, déduire de a) :

$$\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Conclure que :

$$\left(\frac{2.4.6 \dots (2k)}{3.5.7 \dots (2k-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2},$$

puis que :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}, \quad \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}.$$

Remarques

1. D'où vient la formule de Wallis ?

Le contexte du travail de Wallis mérite d'être mentionné. Son point de départ est l'expression intégrale de l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Wallis calcule d'abord, pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$W(p, q) = \int_0^1 \left(1 - x^{1/p}\right)^q dx$$

et obtient

$$W(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q)!} = \frac{p}{p+q} W(p-1, q).$$

Il « interpole » ensuite cette relation de récurrence au cas où p et q sont des demi-entiers, ce qui lui permet d'exprimer

$$W(1/2, 1/2) = \frac{\pi}{4}$$

en fonction de $W(p+1/2, 1/2)$ pour tout entier naturel p . Un encadrement équivalent en substance aux résultats des questions a) et b) et un passage à la limite le conduisent alors à la dernière relation de l'exercice.

Le *théorème du changement de variable* étudié en première année de CPGE montre que

$$W_n = W(1/2, (n-1)/2),$$

ce qui fait le lien avec l'approche de Wallis.

2. Lien avec les coefficients binomiaux

On a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad W(p, q) = \frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

Les calculs de Wallis peuvent donc s'interpréter comme une *extrapolation des coefficients binomiaux* à des demi-entiers. Ce sera le point de départ de Newton pour l'étude de la « série du binôme ».

3. Lien avec la formule de Stirling

Le produit de Wallis est à la base d'une preuve de la formule de Stirling évoquée à la fin du paragraphe **I.2.5**, preuve que vous verrez sans doute en CPGE.

Le développement en série de l'exponentielle

Soit x dans $\mathbb{R}$. Nous allons établir la formule :

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

La notion de *développement d'une fonction en série entière*, étudiée dans les classes de seconde année de CPGE scientifiques, inscrira cette formule dans un contexte général.

Étape 1. Pour n dans $\mathbb{N}$, montrons la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on écrit :

$$\int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1,$$

ce qui établit $\mathcal{P}_0$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire :

$$(1) \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Posons, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad v(t) = e^t.$$

On a alors, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \quad v'(t) = e^t.$$

On écrit la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^x u'(t) v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t) v'(t) dt.$$

Comme u s'annule en x , on a :

$$(2) \quad [u(t) v(t)]_0^x = -u(0) v(0) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt.$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

Étape 2. Posons donc, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Il nous suffit, pour conclure, d'établir la relation :

$$R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Supposons $x \geq 0$. La fonction $\exp$ est majorée par e^x sur $[0, x]$. Comme

$$\forall t \in [0, x], \quad 0 \leq (x-t)^n \leq x^n,$$

on a :

$$\forall t \in [0, x], \quad 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^x.$$

En intégrant cet encadrement sur $[0, x]$, il vient

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ grâce à l'exercice 192, ce qui amène la conclusion. Notons que si $0 \leq x \leq 1$, la majoration

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

rend la conclusion immédiate.

Pour $x \leq 0$, le raisonnement est analogue, mais il faut tenir compte du fait que les bornes sont « dans le mauvais ordre ». Puisque $\exp$ est cette fois majorée par 1 sur $[0, x]$, on aboutit à

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 196 (AD). Compléter les détails de la preuve du cas $x \leq 0$.

L'exercice suivant, plus théorique, établit l'irrationalité du nombre e .

Exercice 197 ((D). Irrationalité de e). a) Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, justifier :

$$0 < e - u_n < \frac{e}{(n+1)!}.$$

b) On raisonne par l'absurde et on suppose e rationnel. On peut donc écrire :

$$e = \frac{p}{q}, \quad (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}.$$

Vérifier que, pour $n \geq q$, le réel

$$n!(e - u_n)$$

est un entier appartenant à $]0, e/(n+1)[$. Obtenir alors une contradiction.

La démonstration précédente est plus sophistiquée que celle vue pour $\sqrt{2}$. C'est normal, car la définition même de e n'est pas évidente. De manière générale, les preuves d'irrationalité sont en général délicates. Ainsi, le nombre π est irrationnel, mais aucune démonstration de ce résultat n'est vraiment très simple.

La première étape de la preuve du développement en série entière de l'exponentielle se généralise en la *formule de Taylor avec reste intégral*, qui est un des résultats importants de la première année de CPGE.

Exercice 198 ((D,*) Formule de Taylor avec reste intégral). Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de tous ordres. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Séries

Le paragraphe précédent appelle naturellement la notion de série, que vous retrouverez en première année de CPGE. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel S , il est naturel de poser

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On dit que la série de terme général u_n est convergente et que sa somme est S .

On a rencontré plusieurs exemples dans le texte, notamment dans les exercices. Dans le paragraphe **I.2.2**, pour r élément de $] -1, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k r^k = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Dans le paragraphe **I.2.3** :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

Dans le paragraphe **I.7.1**, pour x dans $] -1, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x), \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Et enfin, dans le présent paragraphe, pour tout nombre réel x :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Ces formules n'ont pas le même degré de difficulté. On trouvera un exemple sensiblement plus profond et une discussion dans le paragraphe **II.7**, à la suite de l'énoncé du problème.

Exercice 199 ((D,*) Développement en série entière des fonctions sin et cos). Pour x dans $\mathbb{R}$, démontrer les formules :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

6.2 La méthode des rectangles

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont toutes continues.

La méthode des rectangles est une technique très utile pour estimer certaines sommes que l'on ne sait pas calculer exactement de façon simple. On fixe, dans la suite, deux réels a et b tels que $a < b$.

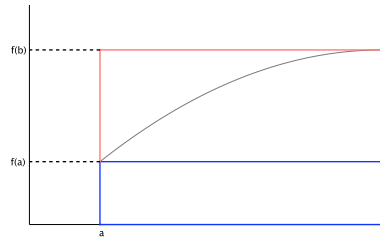
Le point de départ est la simple remarque suivante. Si la fonction f est croissante sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(a) \leq f(t) \leq f(b),$$

d'où, en intégrant sur $[a, b]$ par rapport à la variable t :

$$(1) \quad (b-a)f(a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)f(b).$$

Si f est positive (ce qui est le cas le plus fréquent d'application), l'inégalité précédente traduit le fait que l'aire limitée par le graphe de f et l'axe des abscisses est comprise entre l'aire du petit rectangle de sommets $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(a))$, $(b, 0)$ et du grand rectangle de sommets $(a, 0)$, $(a, f(b))$, $(b, f(b))$, $(b, 0)$. Cette reformulation, visuellement évidente, est la bonne façon de comprendre ce résultat. Le lecteur est prié de faire systématiquement un dessin.



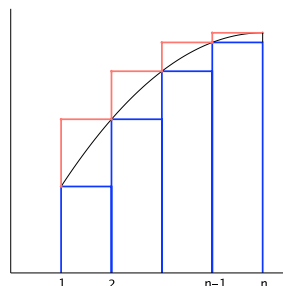
Dans les applications, on considère une fonction f définie sur $[1, +\infty[$ et croissante sur cet intervalle. On cherche à estimer

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1),$$

encadrement illustré par la figure ci-après.



En sommant pour k dans $\{1, \dots, n-1\}$, il vient :

$$S_n - f(n) \leq \int_1^n f(t) dt \leq S_n - f(1).$$

Autrement dit :

$$(2) \quad \int_1^n f(t) dt + f(1) \leq S_n \leq \int_1^n f(t) dt + f(n).$$

Il est évidemment inutile d'apprendre cet encadrement très facile à retrouver par un dessin. Si le minorant et le majorant de (2) ne diffèrent pas trop, $\int_1^n f(t) dt$ est une bonne approximation de S_n .

L'intérêt de la méthode vient du fait que l'on dispose de beaucoup plus de techniques pour calculer des intégrales que pour calculer des sommes : outre les primitives usuelles et l'intégration par parties, vous verrez en première année les méthodes fondées sur le *changement de variable*.

Si f est décroissante sur $[a, b]$, on montre l'analogue de (1) :

$$(1') \quad (b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)f(a).$$

Et si f est décroissante sur $[1, +\infty[$, on montre l'analogue de (2) :

$$(2') \quad \int_1^n f(t) dt + f(n) \leq S_n \leq \int_1^n f(t) dt + f(1).$$

Exemples

1. (*) Estimation des nombres harmoniques H_n

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Le nombre harmonique H_n n'est autre que :

$$\sum_{k=1}^n f(k).$$

En appliquant ce qui précède à la fonction décroissante f , il vient :

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

En particulier :

$$\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

Cet encadrement montre que H_n tend vers $+\infty$ (ce qui peut surprendre à première vue, car $1/n$ tend vers 0) et, surtout, donne une estimation de la « vitesse de divergence ». Cette divergence est très lente : H_{10^6} vaut environ 14,4.

2. (*) *Estimation de $n!$*

On remarque que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

On peut donc encadrer $\ln(n!)$ en appliquant la méthode des rectangles à la fonction croissante $\ln$. On obtient :

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

Or, on a vu (exemple 2, paragraphe **I.7.2**) que :

$$\int_1^n \ln(t) dt = n \ln(n) - n + 1.$$

Il vient donc :

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \ln(n) - n + \ln(n) + 1.$$

Puisque $\exp$ est croissante, on en déduit :

$$e \left(\frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq n e \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Cet encadrement est assez précis : le minorant et le majorant diffèrent d'un facteur multiplicatif n/e , négligeable devant le terme $(n/e)^n$.

Le nombre de chiffres de l'écriture de l'entier m de $\mathbb{N}^*$ en base 10 est $\lfloor \log_{10}(m) \rfloor + 1$. L'encadrement précédent donne un moyen d'estimer le nombre de chiffres de $n!$. À titre indicatif, $60!$ a 82 chiffres. Il est généralement considéré que le nombre d'atomes dans l'univers est majoré par 10^{80} ...

Exercice 200 ((AD,*). Estimation de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ pour $\alpha > 0$). Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$.

On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha.$$

Encadrer S_n par la méthode des rectangles et en déduire que

$$\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ainsi, (S_n) tend vers $+\infty$ « à peu près comme $n^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ ». Si α est un entier, ce résultat est en accord avec celui signalé dans les lignes suivant l'exercice 33.

Exercice 201 ((AD,*). Convergence des séries de Riemann). Soit α dans $]1, +\infty[$. On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle

$$\left[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1} \right].$$

Remarque Les nombres $\zeta(\alpha)$

La limite de la somme précédente est notée $\zeta(\alpha)$. Avec la définition de la somme d'une série vue dans le paragraphe précédent :

$$\forall \alpha \in]1, +\infty[, \quad \zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Vous rencontrerez certainement la fonction ainsi définie, appelée « fonction ζ (zeta) de Riemann » en seconde année de CPGE. Euler a établi les très belles formules :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots, \quad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{6825 \times 93555}$$

et a montré, plus généralement, que pour p dans $\mathbb{N}^*$, $\zeta(2p)$ est de la forme $\pi^{2p} r_p$ où r_p est un rationnel. Le problème proposé dans le chapitre II.7 indique deux preuves de la première de ces égalités.

Exercice 202 ((AD). Un résultat général de comparaison somme-intégrale). a) On suppose f croissante sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\frac{f(n)}{\int_1^n f(t) dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

alors :

$$\frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_1^n f(t) dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

b) On prend $f = \exp$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{et} \quad \int_1^n f(t) dt.$$

Le résultat de a) s'applique-t-il ? Expliquer.

L'exercice ci-après précise le comportement de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ des nombres harmoniques.

Exercice 203 ((AD,*). Constante d'Euler). *Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente.*

La limite de la suite précédente est appelée *constante d'Euler* et traditionnellement notée γ . Il est conjecturé depuis Euler que γ est un nombre irrationnel. Vous deviendrez célèbre si vous le prouvez.

7 Problème : deux calculs de $\zeta(2)$

Dans l'exercice 201, on a montré, pour tout réel $\alpha > 1$, l'existence de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha).$$

Le but de ce problème est d'établir, par deux méthodes très différentes, la relation :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I

1. a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^\pi t \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt.$$

On pourra intégrer par parties.

- b) Trouver deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$, soit :

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt).$$

Montrer, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$ non multiple entier de 2π :

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Dédurre de ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$$

où φ est une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$ que l'on précisera.

4. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $[0, \pi]$ et que sa dérivée φ' est continue sur $[0, \pi]$.

5. Conclure en utilisant l'exercice 121 (lemme de Riemann-Lebesgue).

Partie II

Pour t réel non multiple entier de π , on pose :

$$\cotan(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

1. a) Vérifier que la fonction $\cotan$ est périodique de période π .
- b) Calculer la dérivée de la fonction $\cotan$.
- c) Tracer le graphe de la restriction de $\cotan$ à $]0, \pi[$.
- d) Démontrer, pour t dans $]0, \pi/2]$, les inégalités :

$$\cotan(t) \leq \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t^2} - 1 \leq \cotan^2(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a) Pour z dans $\mathbb{C}$, établir la formule :

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

b) Soit m dans $\mathbb{N}$. Pour z dans $\mathbb{C}$, montrer :

$$(z-i)^{2m+1} - (z+i)^{2m+1} = (4m+2)i \prod_{k=1}^m \left(z^2 - \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \right).$$

3.a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme, calculer le coefficient de z^{2m-2} dans le développement de :

$$(z+i)^{2m+1} - (z-i)^{2m+1}.$$

b) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Dédurre des questions 3.a) et 2.b) la formule :

$$\sum_{k=1}^m \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

On pourra utiliser le polynôme Q_m défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_m(t) = \prod_{k=1}^m \left(t - \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \right).$$

4. Dédurre des questions 1.d) et 3.b) la valeur de $\zeta(2)$.

Remarque historique

En 1644, Mengoli a posé la question de la valeur de la somme.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Certaines sommes apparemment proches se calculent aisément. Reprenons les exemples du texte, déjà listés en **II.7.1**. Ainsi, la relation « télescopique » du paragraphe **I.2.3**

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

entraîne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Ce calcul de somme était connu de Huygens et Leibniz. La somme de la série géométrique :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

est plus ancien encore (Oresme). Il part lui aussi d'une expression exacte de la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Le calcul différentiel et intégral permet d'établir facilement des formules plus profondes. On a ainsi démontré respectivement dans les paragraphes **I.7.1** et **II.6.1** les identités

$$(2) \quad \forall x \in]-1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},$$

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour chacune de ces deux relations, on passe par une expression intégrale des sommes partielles. Par exemple, (3) se déduit des égalités

$$(4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Les formules du type (2) et (3) seront étudiées en seconde année de CPGE (« développements en série entière »). Elles ont été établies aux débuts du calcul différentiel : (2) remonte en fait à Newton.

Le calcul de $\zeta(2)$ est beaucoup plus difficile. Il est d'ailleurs quelque peu miraculeux que cette somme soit simplement reliée à la constante π . Il n'existe aucune identité aussi simple que (1), ni même que (4), pour la somme partielle

$$(5) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

L'expression de S_n obtenue dans la question 3 de la partie I du problème peut s'interpréter à l'aide de la théorie des séries de Fourier, nettement postérieure à Euler.

J. Bernoulli s'est intéressé à partir de 1690 à la question de Mengoli et l'a popularisée. À compter de ce moment, le calcul de $\zeta(2)$ a acquis, jusqu'à sa résolution par Euler en 1735, un statut mythique parmi les mathématiciens. C'est le « problème de Bâle », ainsi nommé en hommage à la ville de Bernoulli.

Comment Euler a-t-il procédé ? Son point de départ a été un calcul numérique (approché) de $\zeta(2)$. Un tel calcul ne va pas de soi, car la suite des sommes partielles (5) converge lentement. En gros, la différence

$$\zeta(2) - S_n$$

tend vers 0 « comme $1/n$ », de sorte qu'il est nécessaire, à peu de choses près, de calculer S_{1000} pour disposer de 3 chiffres de $\zeta(2)$. Il faut donc « accélérer la convergence », c'est-à-dire trouver une suite convergeant plus rapidement vers $\zeta(2)$. Euler a donc construit une telle suite ; on a rencontré une situation de ce genre dans les considérations qui suivent l'exercice 114 (calcul approché de $\ln(2)$ par Newton). L'accélération de convergence a conduit Euler à une excellente valeur approchée de $\zeta(2)$.

Euler avait une connaissance précise des valeurs numériques des constantes classiques. L'approximation précédente lui a permis de conjecturer la formule :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il a ensuite donné plusieurs démonstrations de cette égalité. Toutes ne sont pas correctes du point de vue des standards de rigueur actuels, mais toutes peuvent être corrigées de manière à être rendues intégralement satisfaisantes. Les décrire nous amènerait un peu loin. Disons simplement que le spectaculaire « développement du sinus en produit eulérien » :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(x),$$

dont la preuve est accessible en CPGE, contient simultanément le produit infini de Wallis du paragraphe **II.7.1** (prendre $x = \pi/2$) et, moins trivialement au niveau de ce document, le calcul de $\zeta(2), \zeta(4)$...

Les deux démonstrations proposées dans le problème, qui semblent « sortir du chapeau », sont en fait des versions élémentaires de preuves plus savantes mais naturelles dans un contexte approprié.

8 Appendice

Le rôle du calcul en mathématiques

Il n'aura pas échappé au lecteur que ce texte est en grande partie axé sur les méthodes et techniques de calcul. Ce court appendice explique les raisons de ce choix.

La pratique d'un instrument de musique ou d'un sport requiert une préparation technique importante. De même, les mathématiques exigent une bonne maîtrise du calcul.

Le terme générique « calcul » recouvre en fait des situations très variées. Au niveau élémentaire de ce texte, on rencontre ainsi des manipulations de sommes et de produits, de la trigonométrie et des nombres complexes, des inégalités et inéquations élémentaires, des études de fonctions, des calculs de limite, des intégrales... Ces thèmes, d'ampleur diverse, ont tous une importance véritable. Rappelons, pour commencer, quelques points d'histoire, pour la plupart déjà évoqués dans le corps du document.

- L'absence de notations efficaces (parenthèses, indices, sommes, produits) a été durant des siècles un obstacle au développement des mathématiques.

- La forme actuelle de la trigonométrie a considérablement simplifié certaines questions de géométrie. Incidemment, la trigonométrie des Anciens (Ptolémée) était fondée sur la fonction *corde*, de maniement beaucoup plus compliqué que $\cos$ et $\sin$.

- Les nombres complexes, introduits historiquement pour résoudre les équations de degré 3, se sont révélés utiles dans bien d'autres branches des mathématiques et de la physique.

- L'invention, au dix-septième siècle, du calcul différentiel et intégral a permis de traiter de manière quasi-automatique des questions variées et jusque là inaccessibles : en mécanique comme en analyse et en géométrie (trajectoires des planètes, problèmes d'optimisation, tangentes à une courbe, calculs de longueurs, d'aires et de volumes,...).

Le caractère historique des exemples précédents ne doit pas induire en erreur. S'il est indiscutable que les « nouvelles technologies » apportent une aide précieuse aux scientifiques, l'idée naïve selon laquelle les ordinateurs frapperaient le calcul d'obsolescence est complètement fausse. Se servir intelligemment d'un logiciel de calcul formel ou numérique demande une claire conscience de ce que peut faire ledit logiciel et de la manière dont il procède. Dans ce but, il est indispensable de traiter « à la main » un grand nombre d'exemples simples. Enfin, même si la « substitution des idées au calcul » est une force directrice des mathématiques, il n'est pas toujours aisé de dissocier, dans une démonstration, calcul et raisonnement : certains calculs peuvent à bon droit être considérés comme des idées. En résumé, le calcul est consubstantiel aux mathématiques.

Toute initiation sérieuse aux mathématiques et, plus généralement, aux sciences « dures » doit donc faire une place importante au calcul. En CPGE, la situation est assez claire. Les exercices et problèmes proposés ne nécessitent que très rarement des calculs excédant une demi-douzaine de lignes. Il est en revanche essentiel de savoir effectuer rapidement et sûrement des manipulations

simples. Pour atteindre cet objectif, il est indispensable de s'entraîner, y compris par des exercices répétitifs analogues aux gammes.

Les lacunes techniques sont un des principaux problèmes que peuvent rencontrer les étudiants entrant en CPGE. Les nouveaux programmes de MPSI et PCSI tiennent compte de cette situation et du fait que la formation calculatoire des nouveaux bacheliers est moindre que celle de leurs aînés. Sont ainsi prévus dans les programmes de PCSI et MPSI, tôt en première année, et après un bloc « Calcul algébrique », un bloc « Nombres complexes et trigonométrie » et un bloc de type « Calculus », c'est-à-dire un enseignement des techniques de base de l'analyse. C'est en grande partie comme introduction et accompagnement à cet enseignement que le présent document a été conçu.

9 Réponses ou indications

122. On écrit :

$$Z = \exp\left(\frac{i(\alpha + \beta)}{2}\right) \times 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Le module de Z est

$$|Z| = 2 \left| \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right|.$$

Si Z est non nul, on discute selon le signe de $\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$. Si ce réel est > 0 (resp. < 0), un argument de Z est $\frac{\alpha + \beta}{2}$ (resp. $\frac{\alpha + \beta}{2} + \pi$).

123. La quantité considérée est la partie réelle de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = e^{ix} \frac{1 - \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)\right)^n}{1 - \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)} = 0.$$

124. Le réel $K_n(x)$ est la partie imaginaire de

$$U_n(x) = e^{ix/2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}.$$

Pour x réel non multiple de 2π ,

$$U_n(x) = e^{ix/2} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}.$$

On transforme le numérateur et le dénominateur par la technique de l'arc moitié.

Il vient :

$$U_n(x) = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} e^{inx/2}, \quad K_n(x) = \frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)}.$$

125. Les racines sixièmes de 1 sont :

$$1, -1, j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \exp(i\pi/3) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \exp(-i\pi/3) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Les racines huitièmes de 1 sont :

$$\pm 1, \pm i, \pm \exp(\pm i\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm i).$$

126. Le produit vaut :

$$\exp\left(\frac{2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} k}{n}\right) = \exp(i\pi(n-1)),$$

i.e. 1 lorsque n est impair, -1 lorsque n est pair.

127. On a

$$L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad A_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

En utilisant la relation :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1,$$

on obtient :

$$L_n \longrightarrow 2\pi, \quad A_n \longrightarrow \pi.$$

Ceci est conforme à l'intuition (approximation de l'aire et du périmètre du cercle unité par des polygones réguliers inscrits).

128. a) La relation est

$$u_{k+1} = u_k^2 - 2.$$

b) Le caractère rationnel de u_k se démontre facilement par récurrence. On a :

$$u_{k+1} = \frac{a_k^2 - 2b_k^2}{b_k^2}.$$

Tout diviseur commun à $a_k^2 - 2b_k^2$ et b_k^2 divise, par combinaison linéaire, a_k^2 et b_k^2 . Or, ces deux entiers sont premiers entre eux. Donc :

$$a_{k+1} = a_k^2 - 2b_k^2, \quad b_{k+1} = b_k^2.$$

129. On a $U_m \subset U_n$ si et seulement si m divise n .

Supposons d'abord que m divise n : $n = qm$ avec q dans $\mathbb{N}^*$. Alors, si $z \in U_m$, $z^m = 1$, équation qui implique $(z^m)^q = 1$, i.e. $z^n = 1$, i.e. $z \in U_n$. On a établi que $U_m \subset U_n$.

L'inclusion réciproque est plus délicate. On utilise la division euclidienne de n par m : $n = qm + r$ où q est un élément de $\mathbb{N}$ (le quotient de la division), r un élément de $\{0, \dots, m-1\}$ (le reste de la division). Supposons que m ne divise pas n . Alors $r \neq 0$. On va montrer dans ce cas que U_m n'est pas contenu dans U_n . Dans le cas contraire, on aurait, pour z dans U_m :

$$z^m = 1, \quad z^{qm+r} = 1.$$

Par conséquent :

$$z^r = \frac{z^{qm+r}}{z^{qm}} = 1$$

et $z \in U_r$. L'hypothèse $U_m \subset U_n$ implique $U_m \subset U_r$, ce qui est absurde car U_r est de cardinal $r < m$.

130. Utiliser le calcul de la somme des puissances k -ièmes des racines n -ièmes de 1 et la linéarité de la somme.

131. Nécessairement, z est différent de i . On peut donc réécrire l'équation sous la forme demandée, qui équivaut à

$$\exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z+i}{z-i} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right).$$

Pour θ réel fixé, l'équation

$$\frac{z+i}{z-i} = \exp(i\theta)$$

se ramène à l'équation du premier degré :

$$(\exp(i\theta) - 1)z = i(\exp(i\theta) + 1),$$

Lorsque $\exp(i\theta)$ vaut 1, cette équation n'a pas de solution. Sinon, la technique de l'arc moitié montre que son unique solution est :

$$\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \cotan(\theta/2).$$

Les solutions de l'équation sont donc les :

$$\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Le caractère réel des solutions était prévisible : les images des solutions sont équidistantes des points d'affixes $\pm i$.

132. La somme est :

$$(1 - e^{ix})^n = (2i \sin(x/2))^n e^{-inx/2}.$$

133. Dans l'exemple 1, prendre $a = t$, intégrer par rapport à t entre 0 et x . On trouve

$$\frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

134. On a

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

En combinant ces égalités :

$$A_n = B_n = 2^{n-1}.$$

135. On a :

$$\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1.$$

On peut obtenir la formule relative à $\sin(4x)$ par dérivation.

136. On a :

$$\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3 \cos(x)}{4}, \quad \cos^4(x) = \frac{\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3}{8}.$$

137. b) Noter que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = 0.$$

On en déduit que l'intégrale est nulle pour n impair. Si $n = 2p, p \in \mathbb{N}$, elle est égale à

$$\frac{2\pi \binom{2p}{p}}{4^p}$$

139. a) Puisque le cercle circonscrit au triangle est U , le centre est le point O d'affixe 0.

b) L'équation

$$\frac{z-a}{b-c} = -\frac{\overline{z-a}}{b-c}$$

s'écrit

$$\frac{z-a}{b-c} = -\frac{\bar{z} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}$$

Comme

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{c-b}{bc},$$

on en déduit la relation demandée.

c) Le nombre complexe h vérifie l'équation obtenue en b).

141. En reprenant la démonstration du théorème, on voit que, posant $z = \bar{a}b$, on a :

$$|a+b| = |a| + |b| \iff |z| = \operatorname{Re}(z).$$

La seconde relation équivaut à l'appartenance de z à $\mathbb{R}^+$. Si $a = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, on écrit

$$\bar{a}b = |a|^2 \frac{b}{a}$$

et on voit que z appartient à $\mathbb{R}^+$ si et seulement si tel est le cas de b/a .

142. La condition est : les points d'affixes $z_1, \dots, z_n$ sont situés sur une même demi-droite issue de 0. La démonstration se fait par récurrence sur n à partir de l'exercice précédent.

143. Le degré d'une somme est majoré par le maximum des deux degrés. L'inégalité est stricte si et seulement si les deux polynômes ont même degré et des coefficients dominants opposés.

144. Écrivons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

avec $a_n \neq 0$. Si $n \geq 1$, on voit que

$$x \longmapsto P(x+T) - P(x)$$

est de degré $n-1$ (et de coefficient dominant $na_n T$). L'égalité est donc possible si et seulement si P est constant.

145. a) Pour tout entier $j \geq 1$ et tout réel x :

$$H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) = (j+1) H_j(x).$$

b) On a donc :

$$\sum_{k=1}^n H_j(k) = \frac{H_{j+1}(n)}{j+1}.$$

c) On décompose le polynôme $x \mapsto x^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = H_2(x) - H_1(x).$$

On utilise la question précédente et la linéarité de la somme. Il vient :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{H_3(n)}{3} - \frac{H_2(n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Méthode analogue pour la somme des cubes.

146. On applique la formule de Moivre et la formule du binôme :

$$\cos(nt) + i \sin(nt) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(t) i^k \sin^k(t).$$

Le nombre complexe i^k est réel si k est pair, imaginaire pur si k est impair. On en déduit que $\cos(nt)$ est la partie de la somme correspondant aux indices pairs. Les k pairs de $\{0, \dots, n\}$ sont les 2ℓ , $\ell \in \{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$. Pour $k = 2\ell$, on a

$$i^k = (-1)^\ell, \quad \sin^k(t) = (1 - \cos^2(t))^\ell.$$

Il s'ensuit que, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$\cos(nt) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell \cos^{n-2\ell}(t) (1 - \cos^2(t))^\ell.$$

Il suffit de poser, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$T_n(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell x^{n-2\ell} (1 - x^2)^\ell.$$

147. a) Si $n = 2m$ est un entier pair, le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^{2m} + 1$$

ne prend que des valeurs ≥ 1 sur $\mathbb{R}$ et n'a donc pas de racine réelle.

b) Utiliser les limites en $\pm\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires.

148. Posons :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

où les a_k sont réels. Supposons

$$P(z) = 0.$$

En conjuguant :

$$\overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = 0.$$

Mais le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, donc :

$$\sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = 0.$$

De plus, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués. Donc

$$0 = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{z^k}.$$

Comme les a_k sont réels, cette égalité se réécrit

$$P(\bar{z}) = 0.$$

149. On écrit l'équation sous la forme :

$$z^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

L'idée est que, si $|z|$ est suffisamment grand, le module du membre de droite est plus grand que celui du membre de gauche et que l'égalité ne peut être satisfaite. Précisons. Si z vérifie l'équation, l'inégalité triangulaire implique

$$(1) \quad |z|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k.$$

Si $|z| \leq 1$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad |z|^k \leq |z|^{n-1}.$$

Le second membre de (1) est donc majoré par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{n-1},$$

ce qui entraîne bien :

$$|z| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

150. a) Le polynôme s'écrit

$$(x-4)(x^2+4x+1).$$

b) Noter que 1 est racine évidente.

151. a) Pour z dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}).$$

Cette égalité subsiste en 1 car deux polynômes coïncidant sur un ensemble infini sont égaux.

b) Prenons $z = 1$. Il vient

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n}).$$

On utilise alors la technique de l'arc moitié. Il vient

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} (-2i \sin(k\pi/n)) = (-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n).$$

Mais

$$\prod_{k=1}^n e^{ik\pi/n} = \exp\left(i \frac{n-1}{2} \pi\right) = i^{n-1}.$$

On aboutit à

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

152. Soit D une droite contenant $n+1$ points du graphe de P : D n'est pas verticale, donc admet une équation de la forme

$$y = ax + b.$$

La fonction polynomiale

$$x \mapsto P(x) - ax - b$$

est de degré n et s'annule en $n+1$ points, contradiction.

153. a) Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\cos(t)$ décrit l'intervalle $[-1, 1]$ qui contient une infinité d'éléments. Conclusion par le théorème 11.

b) Vérifier la relation pour $z = \cos(t)$ et utiliser l'argument de a).

155. b) Le second membre est un polynôme de degré $\leq n$ prenant les mêmes valeurs que P sur les $n+1$ points $x_1, \dots, x_{n+1}$.

156. Les solutions sont $\pm(1+2i)$.

157. Puisque Z est dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on peut écrire $Z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et θ dans $] -\pi, \pi[$. Les racines carrées de Z dans $\mathbb{C}$ sont $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ et $\sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)}$. Comme $\theta/2$ est dans $] -\pi/2, \pi/2[$, la première de ces racines est de partie réelle strictement positive, la seconde (qui est l'opposé de la première) de partie réelle strictement négative.

158. a) Il suffit de prendre : $h = -a/3$.

b) Appliquer le théorème 13.

c) On écrit :

$$z^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v).$$

Donc

$$z^3 + pz + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = u^3 + v^3 + q.$$

d) Les complexes u^3 et v^3 sont racines de l'équation du second degré :

$$Z^2 + qZ - p/3 = 0.$$

159. On applique ce qui précède. L'équation du second degré obtenue dans la question d) de l'exercice précédent s'écrit ici :

$$Z^2 - 40Z + 2 = 0.$$

Ses racines sont les deux réels > 0

$$20 \pm 14\sqrt{2}.$$

Notons, comme dans le paragraphe **II.1.3**, $j = \exp(2i\pi/3)$. Les valeurs possibles de $u + v$ sont, compte-tenu de $uv = 2$:

$$z_1 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}},$$

$$z_2 = j\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + j^2\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}, \quad z_3 = \overline{z_2} = j^2\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + j\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Mais d'autre part, 4 est racine de l'équation. On factorise :

$$z^3 - 6z - 40 = (z - 4)(z^2 + 4z + 10).$$

Les racines sont

$$4, \quad -2 + i\sqrt{6}, \quad -2 - i\sqrt{6}.$$

En considérant le signe des parties imaginaires, il vient

$$z_1 = 4, \quad z_2 = -2 + i\sqrt{6}, \quad z_3 = -2 - i\sqrt{6}.$$

161. On a

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 - 2 \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

162. On retrouve

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0, \quad \prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = (-1)^{n-1}.$$

163. La démonstration faite dans l'exercice 67 montre que les trois réels

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right), \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

sont racines de l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Comme la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, ces trois réels sont deux à deux distincts. Ce sont donc exactement les racines de l'équation. Leur somme est -1 , leur produit 1.

164. a) On a

$$us = a + b + c, \quad u = ab + bc + ca, \quad p = abc.$$

b) On a donc

$$a^3 = sa^2 - ua + p, \quad b^3 = sb^2 - ub + p, \quad c^3 = sc^2 - uc + p.$$

Sommons ces égalités. Il vient :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = s(a^2 + b^2 + c^2 - u).$$

Ainsi, si a, b, c sont des nombres complexes :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \times (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

165. Calculons

$$P(1) = 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc = ab + bc + ca - (a + b + c),$$

$$P(1) = abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - a - b - c \right).$$

Ce nombre est < 0 . Parmi les réels $1 - a, 1 - b, 1 - c$, il y en a un ou trois de négatif. La seconde hypothèse est exclue car $abc = 1$.

166. Les solutions sont les fonctions polynomiales de degré au plus $n - 1$. La démonstration est facile par récurrence sur n .

167. La dérivée de E est donnée par :

$$E'(t) = m\ell^2\theta'(t)\theta''(t) + mg\ell\theta'(t)\sin(\theta(t)) = m\ell\theta'(t)(\ell\theta''(t) + g\sin(\theta(t))) = 0.$$

168. a) La fonction f est paire si et seulement si g est nulle. Comme $g(0) = 0$, g est nulle si et seulement si g est constante. par conséquent f est paire si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0, \quad \text{i.e. } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f'(-x) = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si f' est impaire.

b) Le raisonnement est analogue en utilisant la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + f(-x).$$

169. a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = g(x + T) + \lambda(x + T) = g(x) + \lambda x + \lambda T.$$

En dérivant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x + T) = g'(x) + \lambda = f'(x).$$

b) Supposons f' périodique de période T . Cherchons λ tel que la fonction

$$g_\lambda : x \mapsto f(x) - \lambda x$$

soit périodique de période T . Dans ce but, posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_\lambda(x) = g_\lambda(x + T) - g_\lambda(x).$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'_\lambda(x) = f'(x + T) - f'(x) = 0.$$

Il suffit donc de choisir λ de sorte que

$$h_\lambda(0) = 0, \text{ i.e. } \lambda = \frac{f(T) - f(0)}{T}$$

pour avoir h_λ nulle et g_λ périodique de période T .

170. Le temps de demi-vie est $\ln(2)/K$.

171. Le temps recherché est, en minutes :

$$12 \frac{\ln(100)}{\ln(2)} = 12 \left(2 + 2 \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \right),$$

soit environ $12 \times 6,64$: à peu près une heure et 20 minutes.

172. Le calcul fait dans l'exercice 88 montre que l'abscisse de $N(x)$ est

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La distance entre ce point et la projection orthogonale du point d'abscisse x sur l'axe (Ox) est

$$\left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right|.$$

Le cas où cette distance est nulle est exclu (f constante, f' nulle). Par continuité, f' reste donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ et on est ramené à déterminer les fonctions f dérivables, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et y vérifiant une équation du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = C f(x), \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

Les solutions sont les :

$$x \longmapsto K e^{Cx}, \quad (C, K) \in \mathbb{R}^{*2}.$$

173. a) Dériver par rapport à y à x fixé. On obtient, pour x et y dans $\mathbb{R}$:

$$f'(x+y) = f(x)f'(y).$$

On prend ensuite $y = 0$.

b) Soit f une solution, $a = f'(0)$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0)e^{ax}.$$

Réinjectant dans l'équation, on voit que f convient si et seulement si $f(0)$ vaut 0 ou 1. Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions

$$x \longmapsto e^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

174. On a d'abord, pour tout réel x :

$$\psi(x) = ((x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2), \quad \psi'(x) = 2((x - x_0) + f'(x_0)(f(x) - y_0)).$$

Autrement dit, $\psi'(x)$ est le double du produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{M_0M(x)}$ et du vecteur de coordonnées $(1, f'(x))$, qui dirige la tangente au graphe de f au point d'abscisse x .

Comme ψ atteint son minimum en x_1 , $\psi'(x_1) = 0$.

175. La limite est α (taux de variation).

176. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la dérivée n -ième demandée est :

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) x^{\alpha-n}.$$

Le cas où α est entier naturel p est évidemment particulier : les dérivées d'ordre supérieur ou égal à $p + 1$ sont identiquement nulles.

177. a) On a

$$f(x) = \exp(v(x) \ln(u(x))).$$

Donc, en dérivant :

$$f'(x) = \left(v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x) \right) u(x)^{v(x)}.$$

b) On applique la question précédente en définissant u et v par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u(x) = v(x) = x$$

On a $f(1) = f'(1) = 1$. L'équation de la tangente est $y = x$.

178. a) Le tableau de variations montre que f est strictement croissante sur $]0, e]$, strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

b) L'égalité $a^b = b^a$ équivaut à $f(a) = f(b)$. Si $a < b$, le résultat de a) montre que $a < e < b$. Il reste deux possibilités pour a , à savoir 1 et 2. Il n'y a pas de $b > e$ tel que $f(b) = 0 = f(1)$. On a $f(4) = f(2)$ et, par a), le seul $b > e$ tel que $f(b) = f(2)$ est 4. Le seul couple solution est $(a, b) = (2, 4)$.

c) Si $n \geq 3$, $f(n) \leq f(3)$ (car f est décroissante sur $[e, +\infty[$). On voit directement que $f(3)$ est plus grand que $f(2)$ (et bien sûr que $f(1)$). Il s'ensuit que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(n) \leq f(3)$. Il reste à composer avec l'exponentielle (qui est croissante) pour terminer.

179. Il suffit d'étudier la fonction

$$x \longmapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Les détails sont pour le lecteur. Interprétation géométrique : le graphe de

$$x \longmapsto (1+x)^\alpha$$

est au-dessus de la droite d'équation $y = 1 + \alpha x$, qui est sa tangente au point d'abscisse 0. On notera que le résultat est un cas particulier du résultat de l'exercice 100 sur les fonctions à dérivée seconde positive.

180. Pour x réel :

$$\psi'_a(x) = \ln a \, a^x.$$

La fonction ψ_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$. Si $a > 1$, $\psi_a(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, 0 en $-\infty$. Si $0 < a < 1$, $\psi_a(x)$ tend vers 0 en $+\infty$, $+\infty$ en $-\infty$.

181. La limite est $\ln(a)$ (taux de variation).

182. Le minimum est atteint pour $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et $h = 2r$.

183. a) Posons, pour x dans $\mathbb{R}^+$:

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+x^\alpha).$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}).$$

Comme $\alpha - 1 < 0$, la fonction :

$$y \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto y^{\alpha-1}$$

est strictement décroissante. Il s'ensuit que $f'(x)$ est strictement négatif pour tout $x > 0$, donc que f est strictement décroissante sur cet intervalle. Comme $f(0) = 0$, le résultat suit.

b) On peut supposer $x > 0$. On écrit dans ce cas :

$$y^\alpha = (x + (y-x))^\alpha = x^\alpha \left(1 + \frac{y-x}{x}\right)^\alpha \leq x^\alpha \left(1 + \left(\frac{y-x}{x}\right)^\alpha\right).$$

Le majorant n'est autre que

$$x^\alpha + (y-x)^\alpha,$$

ce qui établit le résultat.

184. a) On a :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff q = \frac{p}{p-1},$$

ce qui établit les assertions demandées. Pour $p = 2$, $q = 2$. Pour $p = 4$, $q = 4/3$.

b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = x^{p-1} - y.$$

Notons

$$x_0 = y^{1/(p-1)},$$

de sorte que f' est positive sur $[x_0, +\infty[$, négative sur $]0, x_0]$. Le tableau de variations de f montre donc que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(x_0)$. Calculons $f(x_0)$. On a :

$$f(x_0) = \frac{1}{p}x_0^p + \frac{1}{q}y^q - x_0y.$$

Mais on a successivement :

$$x_0^p = y^q, \quad x_0y = y^q, \quad f(x_0) = 0.$$

On en déduit le résultat.

185. a) Appliquer, pour t dans $[ab]$, l'inégalité de Young à $\lambda|f(t)|$ et $|g(t)|/\lambda$, puis intégrer l'inégalité obtenue.

b) La fonction ψ atteint son minimum en

$$\lambda = \left(\frac{\int_a^b |g(t)|^q dt}{\int_a^b |f(t)|^p dt} \right)^{1/(p+q)}.$$

On vérifie que la valeur de ψ en ce point est :

$$\left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

186. a) Pour $n = 2$, le résultat est celui de l'exercice 71.

b) Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Soient $x_1, \dots, x_{2n}$ des réels > 0 . On considère

$$y_1 = \frac{x_1 + x_{n+1}}{2}, y_2 = \frac{x_2 + x_{n+2}}{2}, \dots, y_n = \frac{x_n + x_{2n}}{2}.$$

On a :

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$:

$$y_i \geq \sqrt{x_i x_{i+n}}.$$

La somme précédente est donc minorée par :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i x_{i+n}},$$

En appliquant $\mathcal{P}_n$, on voit que ce dernier minorant est lui-même minoré par :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \sqrt{x_i x_{i+n}}} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i}.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit d'une part que les y_i soient deux à deux égaux (hypothèse $\mathcal{P}_n$), d'autre part que, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, x_i et x_{i+n} soient égaux. Ces conditions équivalent à

$$x_1 = \dots = x_{2n}.$$

c) Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On complète la liste des x_i en prenant pour x_{n+1} la moyenne arithmétique des x_i :

$$x_{n+1} = m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

On applique $\mathcal{P}_{n+1}$ à $x_1, \dots, x_{n+1}$. Il vient :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} x_i}.$$

Le membre de gauche n'est autre que m . Le membre de droite est

$${}^{n+1}\sqrt{m} {}^{n+1}\sqrt{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Il vient donc :

$$m^{n/n+1} \leq {}^{n+1}\sqrt{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Il suffit d'élever cette inégalité à la puissance $1 + 1/n$, ce qui est licite car $x \mapsto x^{1+1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, pour obtenir l'inégalité

$$m \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que les $x_1, \dots, x_{n+1}$ soient deux à deux égaux (hypothèse $\mathcal{P}_{n+1}$), c'est-à-dire que $x_1, \dots, x_n$ soient deux à deux égaux.

d) La conclusion résulte immédiatement des questions précédentes et de l'exercice 8.

187. Notons

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Pour i dans $\{1, \dots, n\}$, l'inégalité :

$$\ln(y_i) \leq y_i - 1$$

se réécrit :

$$(1) \quad \ln(x_i) - \ln(m) \leq \frac{x_i}{m} - 1.$$

Sommons les inégalités précédentes. En notant que

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i = n,$$

il vient :

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) - n \ln(m) \leq 0, \quad \text{i.e. } n \ln(g) \leq n \ln(m).$$

Il reste à appliquer la fonction exp (strictement croissante) à cette inégalité pour obtenir :

$$g \leq m.$$

Pour que l'inégalité soit une égalité, il faut et il suffit que chacune des inégalités (1) soit une égalité. Cette condition signifie que les x_i sont tous égaux à m , i.e. deux à deux égaux.

188. a) La surface latérale se compose de deux faces d'aire ab , deux faces d'aire bc , deux faces d'aire ca . La formule est justifiée. D'autre part :

$$V = abc.$$

b) Le produit des trois réels ab, bc, ca est V^2 . L'inégalité arithmético-géométrique pour $n = 3$ assure :

$$ab + bc + ca \geq 3V^{2/3}$$

avec égalité si et seulement si ab, bc, ca sont deux à deux égaux i.e. si et seulement si $a = b = c$.

c) On a ainsi

$$S \geq 6V^{2/3}, \quad V \leq \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$$

avec égalité si et seulement si le parallélépipède est un cube.

189. b) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux trois nombres réels $p - a, p - b, p - c$ dont la somme est p , il vient

$$(p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{p^3}{3^3}.$$

Il reste à multiplier cette inégalité par p et à en prendre la racine carrée pour obtenir l'inégalité isopérimétrique pour les triangles.

Il y a égalité si et seulement si $p - a, p - b, p - c$ sont égaux, i.e. si et seulement si le triangle est équilatéral.

190. Toutes les limites sont nulles sauf celle de i qui vaut $+\infty$.

191. On écrit :

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(y)}{y^\alpha}.$$

Lorsque x tend vers 0, y tend vers $+\infty$. Par croissance comparée, cette quantité tend vers 0.

192. a) On établit par récurrence sur n :

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq k^{n-N} u_N.$$

Comme une suite géométrique de raison appartenant à $] -1, 1[$ tend vers 0, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, positive et majorée à partir du rang N par une suite tendant vers 0, tend elle-même vers 0.

b) Fixons k dans $] \ell, 1[$. Par définition de la convergence, il existe N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k.$$

On peut donc appliquer a).

c) Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}.$$

La suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \geq 0}$ tend donc vers 0. On peut conclure en utilisant b).

193. Les réponses sont 1 et $+\infty$. On le voit en écrivant, pour $x > 0$:

$$\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \quad \ln(g(x)) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Posant $y = 1/x^2$, y tend vers 0^+ lorsque x tend vers $+\infty$ et la première expression s'écrit

$$\ln(f(x)) = \frac{\ln(1+y)}{\sqrt{y}} = \frac{\ln(1+y)}{y} \times \sqrt{y}.$$

La dernière écriture est le produit d'une fonction tendant vers 1 lorsque y tend vers 0^+ et d'une fonction tendant vers 0 lorsque y tend vers 0. Il reste à passer à l'exponentielle.

On procède de même pour la seconde expression en posant $y = 1/x$. On a :

$$\ln(g(x)) = \frac{\ln(1+y)}{y} \times \frac{1}{y}.$$

On obtient ici le produit de deux fonctions, dont la première tend vers 1 et la seconde vers $+\infty$.

194. On écrit

$$\ln(f(x)) = x \ln(\ln(x)) - (\ln(x))^2.$$

En factorisant le terme prépondérant $x \ln(\ln(x))$, on voit que cette quantité tend vers $+\infty$ avec x ; il en est de même de $f(x)$.

195. a) On a, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad (\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n = (\cos t)^n (\cos t - 1) \leq 0.$$

En intégrant sur $[0, \pi/2]$ cette inégalité, il vient

$$W_{n+1} \leq W_n.$$

b) Ainsi :

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Mais on a vu que :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$

d'où le résultat.

c) Le résultat provient de a), b) et du théorème des gendarmes.

d) Le premier quotient proposé n'est autre que

$$\frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} \times \frac{2}{\pi},$$

ce qui permet de conclure avec c). Le produit de Wallis s'en déduit en observant que, pour k dans $\mathbb{N}^*$:

$$1 - \frac{1}{4k^2} = \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)(2k)}.$$

La preuve de la dernière relation est pour le lecteur.

197. a) Appliquer la preuve du développement en série entière de l'exponentielle en $x = 1$.

b) On note que

$$n!(e - u_n) = \frac{n!}{q!}p - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}.$$

Si i et j sont deux entiers naturels tels que $j \geq i$, le quotient

$$\frac{j!}{i!} = j(j-1)\dots(i+1)$$

est un entier naturel. La formule précédente montre donc que $n!(e - u_n)$ est entier appartenant à $]0, 1/(n+1)[$.

Pour $n \geq 2$, $n!(u_n - e)$ est un entier appartenant à $]0, 1[$. C'est la contradiction voulue.

198. Raisonner par récurrence sur n et effectuer des intégrations par parties calquées sur la première étape de la preuve du développement en série entière de $\exp$.

199. Utiliser l'exercice précédent, puis suivre la preuve donnée dans la seconde partie du développement en série entière de $\exp$, en notant que toutes les dérivées de $\sin$ et $\cos$ sont bornées par 1.

201. a) On écrit, pour k dans $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

(décroissance de $x \mapsto 1/x^\alpha$). Soit n un entier ≥ 2 . En sommant pour k dans $\{1, \dots, n-1\}$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Par conséquent :

$$S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Il reste à remarquer que :

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^n \leq \frac{1}{\alpha-1},$$

puis que :

$$\frac{1}{\alpha-1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0.$$

La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Elle est majorée par $\alpha/(\alpha-1)$ grâce à la question précédente, donc convergente. La majoration de la limite vient du passage des inégalités larges à la limite. La minoration vient des relations :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n, \quad \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et encore du passage des inégalités larges à la limite.

202. a) Diviser l'encadrement (2) du texte par $\int_1^n f(t) dt$ et utiliser le théorème des gendarmes.

b) Ici

$$S_n = \sum_{k=1}^n e^k = e \frac{e^n - 1}{e - 1}, \quad \int_1^n e^t dt = e^n - e.$$

Par conséquent :

$$\frac{S_n}{\int_1^n f(t) dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

Le résultat de a) ne s'applique pas. En fait, la croissance de f en $+\infty$ est trop rapide : le terme $f(n) = e^n$ de la somme n'est pas « négligeable » devant S_n ou $\int_1^n f(t) dt$. Comme l'erreur dans l'encadrement (2) est $f(n)$, il est déraisonnable d'espérer que S_n et $\int_1^n f(t) dt$ soient proches.

203. L'exemple 1 montre que la suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$ est minorée par 0. Il suffit d'établir que cette suite est décroissante pour conclure à sa convergence. Or, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Or, dans le paragraphe **I.5.3.2** est établie l'inégalité

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(x) \leq x - 1$$

qui montre que la quantité ci-dessus est négative.